



Zachodniopomorski  
Uniwersytet  
Technologiczny  
w Szczecinie

**KATEDRA MECHANIKI  
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN**

**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Mechatroniki**

**Laboratorium  
Wytrzymałości Materiałów**

**Wyboczenie**

**Opracował : dr inż. Leus Mariusz**

**Szczecin 2014 r.**

## 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest poznanie teoretycznych wiadomości o wyboczeniu oraz zbadanie zachowania się pręta stalowego o dużej smukłości ściskanego osiowo wzrastającą siłą aż do momentu utraty stateczności, wyznaczenie siły krytycznej i zbadanie wpływu różnych sposobów zamocowania końców pręta na wartość siły krytycznej. Zmierzone wartości siły krytycznej należy porównać z wartościami obliczonymi ze wzoru Eulera i przeprowadzić dyskusję otrzymanych wyników.

## 2. Wiadomości teoretyczne o wyboczeniu pręta

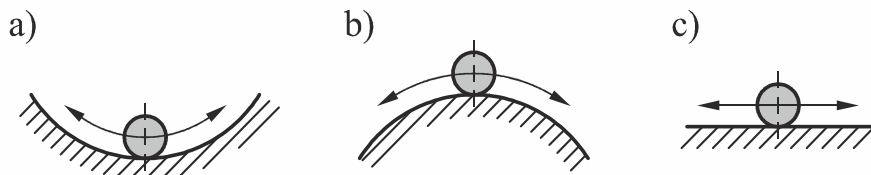
### 2.1. Równowaga ciał

Równowaga ciał może być stateczna, niestateczna lub obojętna [6].

**Równowaga stateczna** (trwała, stabilna, stała) to taka forma równowagi w której ciało wychylone z położenia pierwotnego z powrotem do niego powraca – dowolne małe wychylenie kulki znajdującej się w najniższym punkcie wklęsłej powierzchni spowoduje zmianę jej położenia i powrót do położenia początkowego (rys. 1a).

**Równowaga niestateczna** (chwiejna) występuje gdy ciało wychylone z położenia pierwotnego nie wraca do niego, ale przechodzi do innego – dowolne małe wychylenie kulki znajdującej się w najwyższym punkcie powierzchni wypukłej spowoduje zmianę jej położenia bez możliwości powrotu do położenia początkowego (rys. 1b).

**Równowaga obojętna** występuje gdy przy dowolnie małym wychyleniu ciała wartość energii potencjalnej nie zmienia się – kulka znajdująca się na powierzchni płaskiej znajduje się w stanie równowagi obojętnej, gdyż jej stan jest taki sam w każdym miejscu na płaszczyźnie (rys. 1c).



Rys. 1. Rodzaje równowagi ciała: a) stateczna, b) niestateczna, c) obojętna [5]

Żadne ciało praktyczne nie może pozostawać w położeniu równowagi niestatecznej, gdyż jest to stan graniczny, praktycznie nie do zrealizowania [2]. Ciało przechodzi do innego możliwego położenia. Przejście to może charakteryzować się dużymi przemieszczeniami, powstaniem plastycznych odkształceń a nawet zniszczeniem układu. Taką formę przejścia z jednego stanu równowagi do drugiego nazywamy **utratą stateczności** [6].

Utrata stateczności konstrukcji jest zjawiskiem bardzo niebezpiecznym, gdyż po przekroczeniu obciążenia krytycznego odkształcenia narastają z dużą prędkością, co prowadzi do nieuniknionego zniszczenia konstrukcji. Wyboczenie dla konstrukcji prętowych, płytowych i powłokowych jest bardziej niebezpieczne niż osiągnięcie przez naprężenia granicy proporcjonalności czy też granicy plastyczności [5].

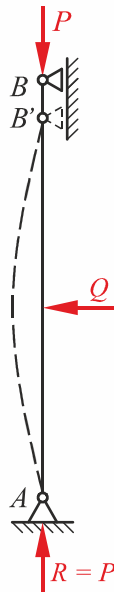
### 2.2. Utrata stateczności (wyboczenie) pręta ściskanego

W układach sztywnych bezwzględne wartości występujących sił nie mają wpływu na rodzaj równowagi. Inaczej jest w układach odkształcalnych [3].

Rozpatrzmy prosty pręt AB przegubowo zamocowany na końcach (rys. 2) i ściskany osiowo siłą  $P$  na tyle małą, że pręt pozostaje prosty. Jeżeli na pręt zadziała się statycznie siłą  $Q$  prostopadłą do osi pręta, to siła ta spowoduje jego ugięcie. Po cofnięciu siły  $Q$  pręt powróci

do swojej prostej postaci. Natomiast gdy charakter działania siły  $Q$  będzie dynamiczny, to wywoła ona drgania pręta około prostej osi. Zwiększenie siły  $P$  spowoduje początkowo wyłącznie wzrost okresu drgań. Jednakże po przekroczeniu przez siłę  $P$  pewnej wartości nazywanej **siłą krytyczną**  $P_{kr}$ , po chwilowym zadziaaniu siłą  $Q$ , pręt nie powróci do swojej pierwotnej prostej postaci.

Po przekroczeniu przez siłę  $P$  wartości krytycznej postać prosta pręta staje się postacią równowagi chwiejnej i pręt w sposób gwałtowny przybiera nową postać równowagi stałej o osi wygiętej, czemu towarzyszy równie nagły wzrost przemieszczeń końca B. Wygięcie pręta spowodowane przekroczeniem przez siłę ściskającą wartości krytycznej  $P_{kr}$  nazywa się **wyboczeniem** [3].



Rys. 2. Pręt ściskany osiowo

Prostoliniową postać równowagi pręta ściskanego osiowo nazywa się **stateczną**, gdy po niewielkim ugięciu, spowodowanym chwilowym działaniem dowolnej siły, pręt wróci do postaci prostoliniowej.

Prostoliniową postać równowagi pręta ściskanego osiowo nazywa się **niestateczną**, gdy po niewielkim ugięciu, spowodowanym chwilowym działaniem dowolnej siły, pręt nie wróci do postaci prostoliniowej.

**Siłą krytyczną** nazywa się taką wartość siły ściskającej osiowo, przekroczenie której spowoduje utratę stateczności prostoliniowej równowagi pręta.

### 2.3. Wyboczenie sprężyste pręta

**Wyboczeniem sprężystym** nazywamy taki przypadek utraty stateczności, w którym siła krytyczna wywołuje powstanie naprężeń normalnych mniejszych od granicy proporcjonalności  $R_H$  [6].

Podstawy teoretyczne sprężystego wyboczenia prętów prostych przedstawił Euler wyprowadzając wzór na siłę krytyczną przy ściskaniu pręta prostego podpartego dwustronnie przegubowo (rys. 2).

Ponieważ w tym przypadku warunki podparcia nie określają uprzywilejowanego kierunku wygięcia, to decydujący wpływ ma tu sztywność zginania pręta, tzn. wyboczenie następuje w płaszczyźnie najmniejszej sztywności zginania  $EJ$  [2].

Rozwiązując równanie różniczkowe osi ugiętej pręta wyoboczonego Euler wyprowadził wzór na siłę ściskającą pręt w postaci:

$$P = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2} \quad (1)$$

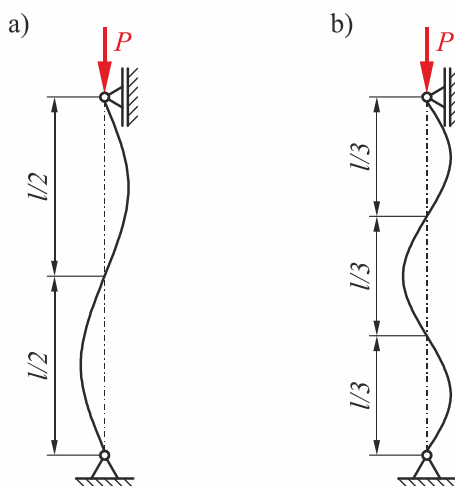
gdzie:  $E$  – współczynnik sprężystości podłużnej,  
 $J$  – moment bezwładności,  
 $l$  – długość pręta.

Przyjmując za  $n = 0$  uzyskujemy rozwiązanie trywialne  $P = 0$ . Podstawiając zaś za  $n = 1$  obliczamy najmniejszą wartość siły  $P$ , dla której jest możliwe zachowanie równowagi pręta w postaci wygiętej i jest to tzw. Eulerowska siła krytyczna:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l^2} \quad (2)$$

We wzorze tym symbolem  $J_{\min}$  oznaczono najmniejszą wartość głównego centralnego momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta, gdyż wyoboczenie pręta nastąpi w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi głównej, względem której moment bezwładności przekroju jest najmniejszy [4].

Jeżeli za  $n$  podstawimy dalsze wartości ( $n = 2, n = 3$  itd.) wówczas oś ugięcia przybiera postać dwu, trzech lub więcej sinusoidalnych półfal (rys. 3). Te większe wartości siły krytycznej są pozbawione istotnego znaczenia praktycznego, gdyż już po osiągnięciu pierwszej wartości krytycznej (dla  $n = 1$ ) siła powoduje wygięcie pręta w kształt jednej półfali i dalszy jej wzrost pociągnie za sobą dalsze zginanie bez możliwości zmiany tego kształtu [2].



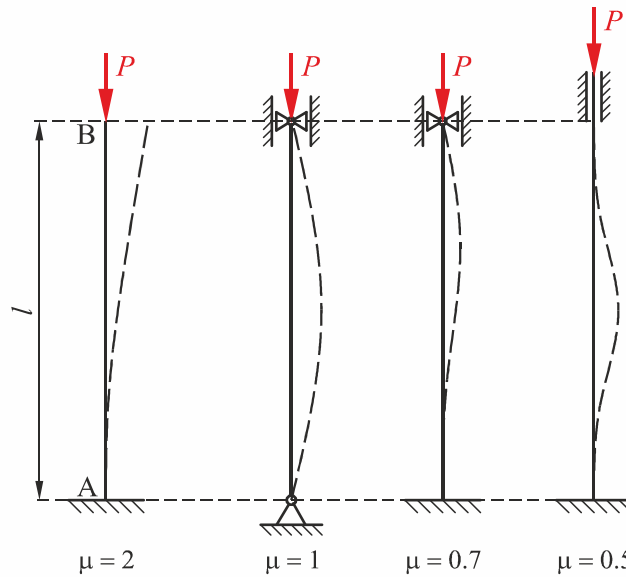
Rys. 3. Postaci wyoboczenia dla: a)  $n = 2$ , b)  $n = 3$

Zmiana sposobu zamocowania pręta pociąga za sobą zmianę warunków brzegowych. W ogólnym przypadku, uwzględniając różne sposoby zamocowania, zależność (2) na **siłę krytyczną  $P_{kr}$  przyjmuje postać:**

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_w^2} \quad (3)$$

gdzie:  $l_w = \mu l$  – długość wyoboczeniowa (zredukowana) pręta,  
 $\mu$  – współczynnik zależny od zamocowania.

Na rysunku 4 przedstawiono cztery przypadki różnego zamocowania prętów oraz podano wartości współczynnika  $\mu$ .



Rys. 4. Podstawowe przypadki zamocowania pręta ściskanego

Naprężenie krytyczne przy którym następuje utrata stateczności pręta ściskanego, otrzymamy przez podzielenie wzoru (3) przez pole  $A$  przekroju poprzecznego pręta:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_w^2 \cdot A} \quad (4)$$

W celu ujęcia w krótszej formie wielkości charakteryzujących przekrój poprzeczny pręta, wprowadzono pojęcie tzw. *minimalnego promienia bezwładności przekroju* [4]:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} \quad (5)$$

Następnie po podzieleniu długości wyboczeniowej  $l_w$  przez  $i_{\min}$  otrzymujemy tylko jedną wielkość charakteryzującą wymiary pręta zwaną smukłością pręta  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} \quad (6)$$

Po podstawieniu powyższych oznaczeń eulerowskie naprężenie krytyczne określone wzorem (4) wyraża się prostszą zależnością:

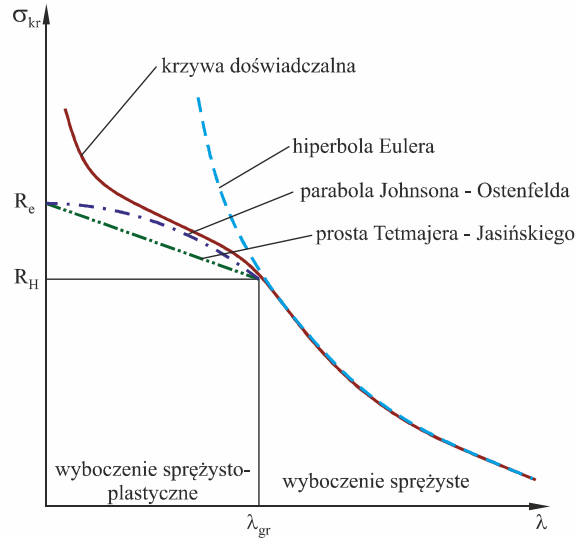
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (7)$$

Graficzną interpretacją wzoru (7) jest hiperbola Eulera przedstawiona na rys. 5. Wzór ten może być stosowany w zakresie sprężystym (gdy naprężenia nie przekraczają granicy stosowalności prawa Hooke'a, a więc dla  $\sigma_{kr} \leq \sigma_H$ ).

Wzór Eulera może być stosowany dla prętów o smukłości większej od smukłości granicznej ( $\lambda \leq \lambda_{gr}$ ), wyznaczonej z zależności:

$$\lambda_{gr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}} \quad (8)$$

Dla stali niskowęglowej smukłość graniczna wynosi około 100.



Rys. 5. Zależność naprężeń krytycznych od smukłości pręta

W obszarze pomiędzy granicą proporcjonalności a granicą wytrzymałości na rozciąganie, przy smukłościach pręta mniejszych od granicznej ( $\lambda < \lambda_{gr}$ ), muszą być stosowane inne metody wyznaczania obciążeń krytycznych – wzoru Eulera stosować nie można.

#### 2.4. Wyboczenie niesprężyste (sprężysto-plastyczne) pręta

W zakresie sprężysto plastycznym stosuje się przeważnie jedną z dwóch aproksymacji [6]:

a) prosta Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma_{kr} = a - b \cdot \lambda \quad (9)$$

b) parabola Johnsona-Ostenfelda:

$$\sigma_{kr} = A - B \cdot \lambda^2 \quad (10)$$

Współczynniki  $A$  i  $B$  oraz  $a$  i  $b$  dla danego materiału pręta wyznacza się doświadczalnie, a ich przybliżone wartości można wyznaczyć z zależności:

$$a = R_e \quad (11)$$

$$b = \frac{R_e - R_H}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{R_H}{E}} \quad (12)$$

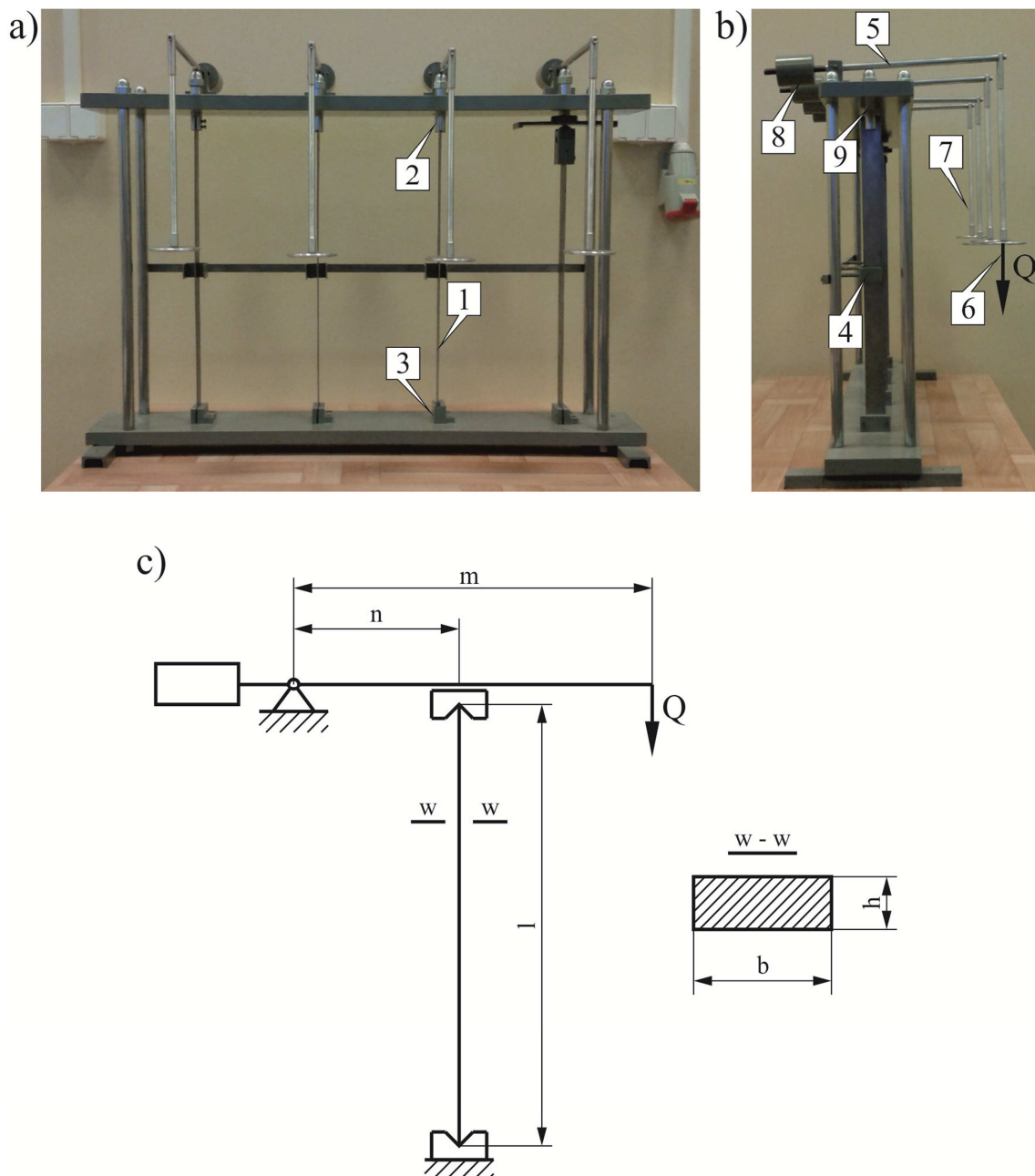
$$A = R_e \quad (13)$$

$$B = \frac{R_e^2}{4E \cdot \pi^2} \quad (14)$$

W literaturze [1] można spotkać gotowe tablice współczynników  $A$ ,  $B$  oraz  $a$  i  $b$  dla różnych materiałów.

### 3. Stanowisko badawcze

Na rys. 6 przedstawiono stanowisko do badania utraty stateczności prostoliniowej postaci równowagi pręta ściskanego osiowo, z różnymi przypadkami zamocowania końców pręta. Pręt stalowy (1) o przekroju prostokątnym umieszczony jest w uchwycie górnym (2) i dolnym (3). W połowie długości pręta zamocowany jest ogranicznik (4) zabezpieczający pręt przed nadmiernym ugięciem i zniszczeniem. Na stanowisku tym można wyznaczyć siłę krytyczną dla czterech podstawowych przypadków zamocowania pręta, z godnie z przypadkami przedstawionymi na rys. 4.



Rys. 6. Stanowisko do badania prętów na wyboczenie: a) widok z przodu, b) widok z boku, c) schemat ideowy stanowiska

Obciążenie pręta odbywa się przez dźwignię (5) za pomocą odważników (6) o ciężarze  $Q$  zakładanych na szalkę (7). Ruchomy przeciwcieżar (8) służy do dokładnego zrównoważenia dźwigni.

Przy określaniu siły działającej na pręt należy uwzględnić ciężar  $Q$  umieszczany na szalce oraz ciężar  $Q_1$  czopa (9) prowadzącego górne zamocowanie pręta. Wartość siły  $P$  ściskającej pręt określa się z zależności:

$$P = 9.807 \cdot \left( Q \cdot \frac{m}{n} + Q_1 \right) \quad (15)$$

W tabelicy 1 podano wartości współczynnika  $\mu$  i ciężaru  $Q_1$  w zależności od sposobu zamocowania pręta, niezbędne do wyznaczenia siły  $P$ .

Tabela 1. Wartości współczynnika  $\mu$  i ciężaru  $Q_1$

Nr pręta	$\mu$	$Q_1$ , kG
1	2	1.150
2	1	0.230
3	0.7	0.230
4	0.5	0.230

#### 4. Wyznaczanie siły krytycznej sposobem bezpośrednim

Wyznaczenie siły krytycznej można przeprowadzić sposobem bezpośrednim lub stosując metodę Southwella polegającą na pomiarze strzałki ugięcia pręta ściskanego siłą  $P$ .

Sposób bezpośredni wyznaczania siły krytycznej polega na obciążaniu pręta wzrastającą siłą ściskającą osiowo aż do momentu jego wyboczenia [3].

Najmniejszą wartość siły, przy której prostoliniowa postać równowagi pręta przestaje być stateczna przyjmuje się jako siłę krytyczną. Badany pręt powinien być możliwie doskonale prosty, a działanie siły – dokładnie wzdłuż jego osi. Wzrastanie siły obciążającej powinno odbywać się w sposób powolny bez wywoływania efektów dynamicznych. Dla prętów o dużej smukłości wychylenia przy sile krytycznej są znaczne i wyraźnie widoczne – bez konieczności stosowania przyrządów pomiarowych. Przy mniejszych smukłościach wychylenia mierzy się za pomocą czujników przystawionych najlepiej z dwóch stron dla zrównoważenia nacisków. O stopniu zbliżania się obciążenia do wartości krytycznej można wnioskować z częstości drgań własnych badanego pręta, która zmniejsza się wraz ze wzrostem obciążania i przy osiągnięciu wartości krytycznej jest równa zeru. Po przekroczeniu siły krytycznej drgania mogą występować ale już dookoła krzywoliniowej postaci równowagi pręta. Próbkę pobudza się do drgań ręcznie przez lekkie jej wychylenia z osi prostoliniowej. Najmniejsza siła ściskająca osiowo, przy której lekko ugięta prosta oś pręta nie wróci samoczynnie do postaci prostoliniowej jest szukaną siłą krytyczną [3].

#### 5. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie wykonać w następujących etapach:

- zmierzyć wymiary pręta (długość pręta  $l$  oraz szerokość  $b$  i wysokość  $h$  przekroju poprzecznego pręta) i zapisać dane w protokole pomiarowym,
- sprawdzić zrównoważenie dźwigni obciążającej stanowiska badawczego – w razie potrzeby zrównoważyć ją przeciwcieżarem,



- zbadać zachowanie pręta przy wzrastającej sile obciążającej oraz wyznaczyć siłę krytyczną sposobem bezpośrednim (ciężarki nakładać bardzo ostrożnie, aby ograniczyć do minimum siły dynamiczne),

Czynności powtórzyć dla innych sposobów zamocowania pręta.

## 6. Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno zawierać:

- określenie celu ćwiczenia,
- wiadomości teoretyczne o wyboczeniu,
- schemat stanowiska badawczego,
- dyskusje otrzymanych wyników:
  - porównanie wartości siły krytycznej wyznaczonej sposobem doświadczalnym i teoretycznym,
  - omówienie wpływu zamocowania końców pręta na wartości siły krytycznej,
  - uwagi i wnioski.
- protokół z wynikami pomiarów i obliczeń.

## Literatura:

1. Bąk R., Burczyński T.: Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa 2001.
2. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłóś Z.: Wytrzymałość materiałów. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa 1997.
3. Grudzinski K.: Ćwiczenia laboratoryjne z wytrzymałości materiałów. Politechnika Szczecińska. Szczecin 1972.
4. Niezgodziński M., Niezgodziński T.: Wytrzymałość materiałów. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2002.
5. Ostwald M.: Podstawy wytrzymałości materiałów. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej. Poznań 2007.
6. Praca zbiorowa pod redakcją: Brudziński T., Beluch W., John A.: Laboratorium z wytrzymałości materiałów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej. Gliwice 2002.