



Zachodniopomorski
Uniwersytet
Technologiczny
w Szczecinie



Wydział
Inżynierii Mechanicznej
i Mechatroniki

Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Dr inż. Mariusz Leus; pok. 45, e-mail: mleus@zut.edu.pl

Metoda Elementów Skończonych

Wykład – 15 godz.

Ćwiczenia laboratoryjne 15 godz.

Zaliczenie ćwiczeń laboratoryjnych – na podstawie odrobionych wszystkich przewidzianych programem ćwiczeń oraz uzyskanie z nich pozytywnych ocen.

EGZAMIN

Podstawą przystąpienia do egzaminu jest uzyskanie zaliczenia ćwiczeń laboratoryjnych

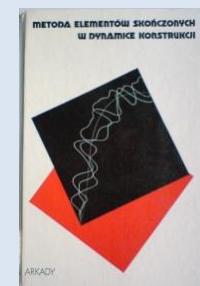
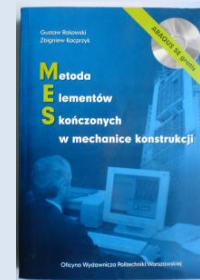
Egzamin składa się z dwóch części:

- część pisemna,
- część teoretyczna (ustna)

Egzamin zostanie przeprowadzony w 3-ch terminach, które zostaną podane do wiadomości na przedostatnim wykładzie

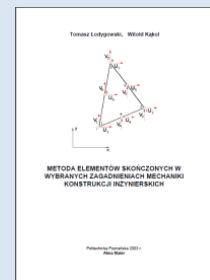
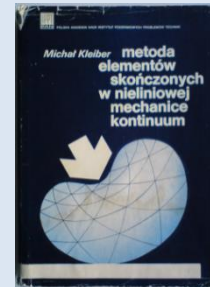
Literatura podstawowa

1. G. Rakowski, Z. Kacprzyk: **Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji**. Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2005 r.
2. O.C. Zienkiewicz: **Metoda Elementów Skończonych**. Arkady Warszawa 1972 r.
3. E. Rusiński, J. Czmochowski, T. Smolnicki: **Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych**. Oficyna wydawnicza Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 2000 r.
4. W. Gawroński, J. Kruszewski, W. Ostachowicz, J. Tarnowski, E. Wittbrodt: **Metoda Elementów Skończonych w dynamice konstrukcji**. Arkady Warszawa 1984 r.



Literatura uzupełniająca

5. M. Daćko, W. Borkowski, S. Dobrociński, T. Niezgoda, M. Wieczorek: **Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji**. Arkady, Warszawa 1994 r.
6. K.J. Bathe: **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996 r.
7. M. Kleiber: **Metoda Elementów Skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum**. Biblioteka Mechaniki Stosowanej IPPT PAN. PWN, Warszawa-Poznań 1985 r.
8. T. Łodygowski, W. Kąkol: **Metoda Elementów Skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich**. Politechnika Poznańska 2003 r.



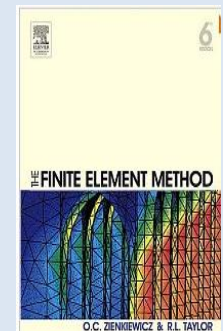
Literatura uzupełniająca

9. A. Jaworski: **Metoda Elementów Skończonych w wytrzymałości konstrukcji**. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1981 r.
10. Zienkiewicz, Zhu.: **A Simple Error Estimator, and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis**. Int. Journal for Numerical Methods in Eng, vol.24, 1987.
11. Bąk R., Burczyński T.: **Wytrzymałość Materiałów z elementami ujęcia komputerowego**. WNT- Warszawa 2001 r.
12. J. Szmelter: **Metoda elementów skończonych w mechanice**. PWN Warszawa 1980 r.
13. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor: **The Finite Element Method Set**. Sixth Edition .Wydawnictwo Elsevier 2005.

Volume 1: Basis and Fundamentals

Volume 2: Solid and Structural Mechanics

Volume 3: Fluid Dynamics



Literatura uzupełniająca

14. Turner M. J, Clough R.W, Martin H.C, Topp L.J: **Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures**. J. Aero. Sci m1956 No 23 p. 805-823.
15. Argyris J.H., Kelsey S., Kamel H.: **Matrix Methods of Structural Analysis**. AGARDOGRAPH 72. Pergamon Press, London 1963.
16. <http://www.kmpkm.zut.edu.pl/pub/MES>
17. <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/>



1. Idea metody

Metoda elementów skończonych (MES) znana jest w literaturze przedmiotu pod nazwą „*The finite element method - (FEM)*” lub też pod nazwą „*The finite element analysis - (FEA)*”.

Zasadniczą ideą tej metody jest budowa złożonej konstrukcji z prostych elementów lub jej podział na odpowiednie małe części. Ma ona zastosowanie zarówno w życiu codziennym jak i w technice.

Przykład: Klocki Lego



Konstrukcja jest modelowana przy użyciu dyskretnych fragmentów zwanych elementami skończonymi.

- Każdy element posiada dokładne równania, które opisują jego odpowiedź na zadane obciążenie.
- “Suma” odpowiedzi wszystkich elementów modelu stanowi całkowitą odpowiedź układu.
- Elementy mają skończone rozmiary (zamiast nieskończenie małych różniczek) oraz skończona liczbę niewiadomych (dyskretnych, zamiast funkcji o nieskończonej liczbie stopni swobody).

2. Zastosowanie MES w technice

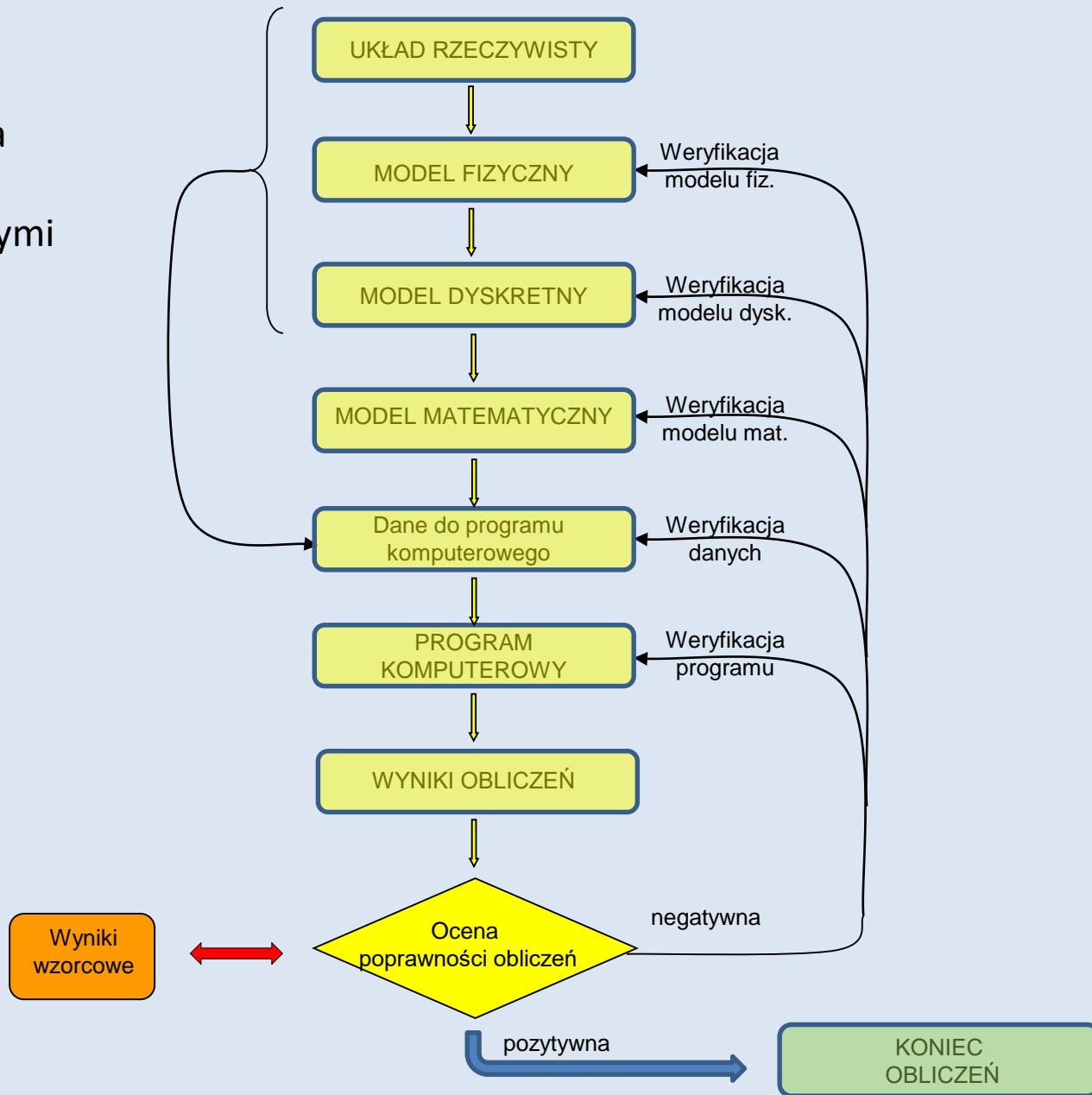
- ✓ W zagadnieniach mechaniki. Możliwości modelowania, analizy i symulacji zachowania się w czasie pracy takich złożonych konstrukcji jak samoloty, pojazdy kosmiczne, platformy do wydobywania ropy naftowej z dna mórz itp.
- ✓ W zagadnieniach przepływu ciepła i płynów.
- ✓ W zagadnieniach zjawisk elektromagnetyzmu.
- ✓ W zagadnieniach biomechaniki.
- ✓ W zagadnieniach geomechaniki.

2. Modelowanie układów mechanicznych

W obliczaniu i analizie konstrukcji mechanicznych zasadniczą rolę odgrywa, modelowanie takich układów. Polega ono na dopasowaniu obliczanego procesu do przebiegu procesu reprezentowanego przez serie pomiarów.

- Z jednej strony należy więc doskonalić przyrządy i procedury pomiarowe.
- Z drugiej strony należy doskonalić modele, równania i programy komputerowe.

Etapy modelowania metodami komputerowymi



Model fizyczny

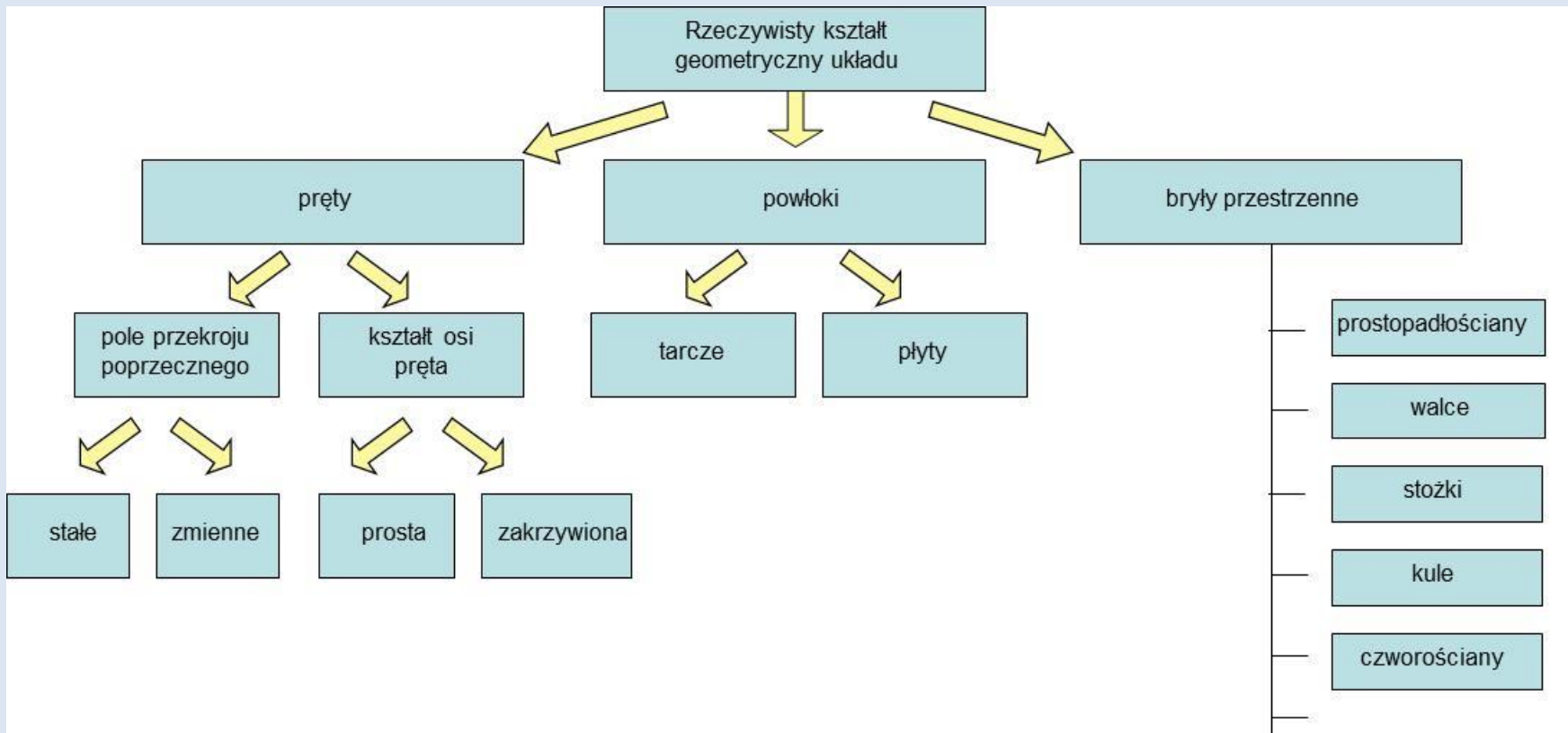
Jest to wyidealizowany układ fizyczny, który dla badanego zagadnienia odpowiada rzeczywistemu układowi tylko pod względem jego istotnych cech. Powstaje on w wyniku uproszczeń, tak że staje się on łatwiejszy do analizy od układu rzeczywistego.

Trafność przejętego modelu fizycznego najczęściej decyduje o zgodności wyników uzyskanych z obliczeń z wynikami pomiarów. Zbyt uproszczony model fizyczny może pomijać istotne cechy układu rzeczywistego, natomiast gdy jest zbyt złożony, prowadzi do dużych, czasem nie do przewyciężenia trudności matematycznych.

Do podstawowych trudności napotykanych przy tworzeniu modelu fizycznego można zaliczyć dużą złożoność układów rzeczywistych i zjawisk fizycznych w nich zachodzących oraz brak danych o właściwościach fizycznych tych układów.

Najczęściej stosowane założenia upraszczające to:

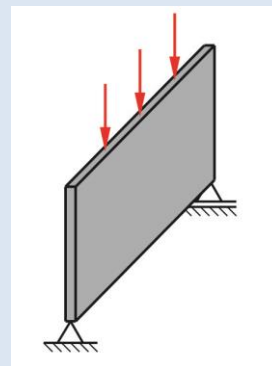
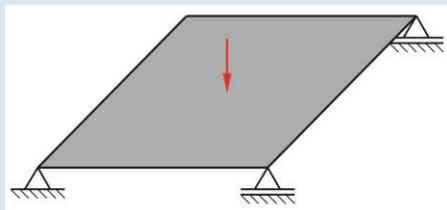
- Kształt geometryczny rozpatrywanego układu. Złożone kształty upraszcza się do brył złożonych z prostych elementów:



Pręt – ciało, którego jeden wymiar (długość) jest wyraźnie większy od pozostałych.

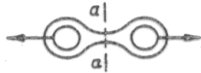

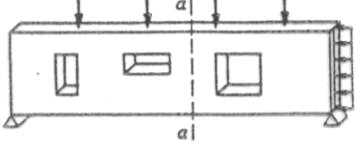

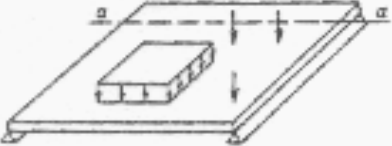

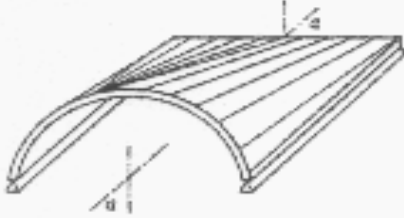

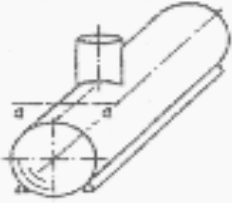
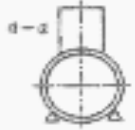
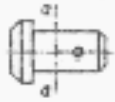


Powłoka – ciało, którego jeden wymiar (grubość) jest mała w porównaniu do dwóch pozostałych.

- *płyta* – ciało ograniczone powierzchniami płaskimi, w którym obciążenie jest prostopadłe do powierzchni płaskiej.
- *tarcza* – jest to szczególny przypadek powłoki w którym obciążenie leży w płaszczyźnie środkowej.

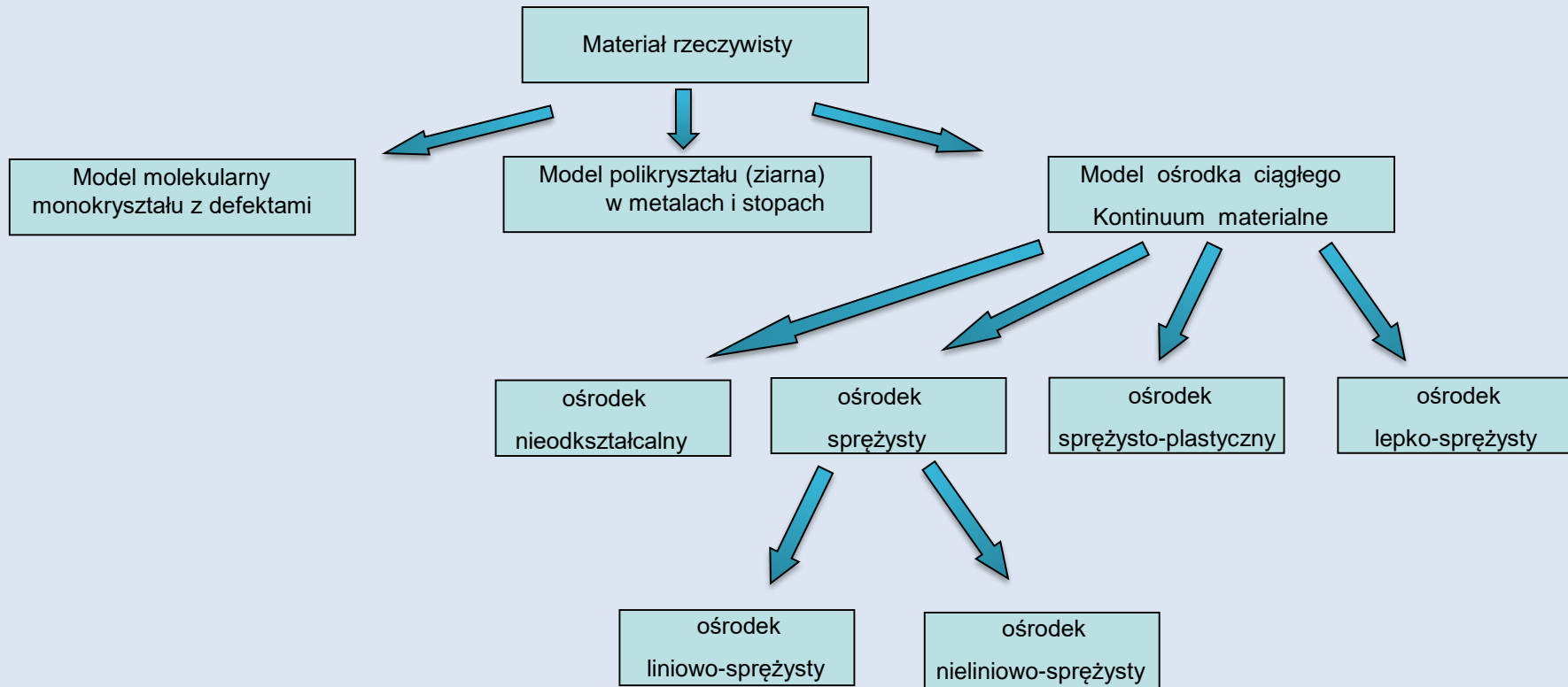


Bryła – jest to ciało, którego wszystkie trzy wymiary są mniej więcej tego samego rzędu.

Grupa	Nazwa	Schemat	Przykłady przekrojów
Pręty	Cięgno		$a-a$
	Belka „Belka prosta”		$a-a$
	Wał wykorbiony		$a-a$
	Łuk		$a-a$
	Sprężyna		$a-a$
Układy prętowe	Kratowy most suwnicy		$a-a$
	Rama		$a-a$ $b-b$
	Ruszt		$a-a$

Tarcze	Ogniwo łańcucha		
	Ściana-tarcza		
Ustroje powierzchniowe	Płyta		
	Powłoka		
	Waleczak		
Bryły	Bolec		
	Kulka łożyska tocznego		

Model materiału



W modelu ośrodka ciągłego często zakłada się że materiał jest:

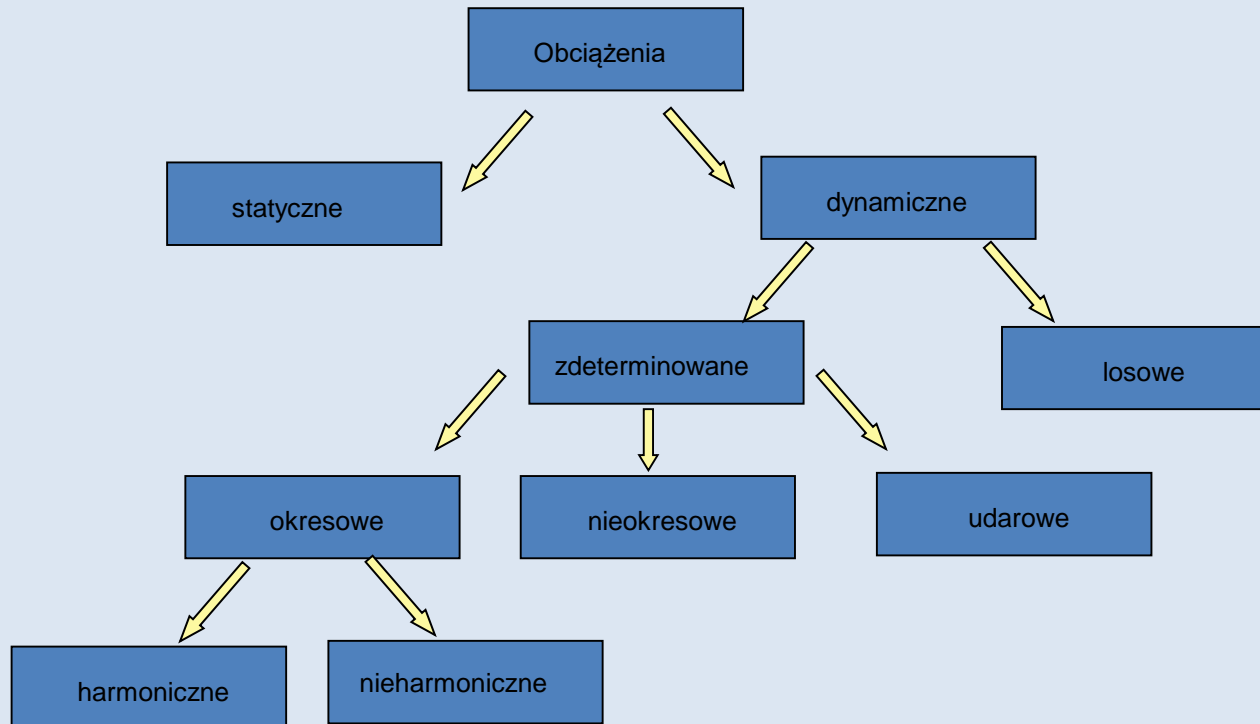
- Jednorodny – niezależność własności od miejsca w pewnej objętości. Własności fizyczne materiału są takie same w dowolnym miejscu wyodrębnionej jego części.
- Izotropowy – niezależność własności mechanicznych od kierunku. We wszystkich kierunkach własności mechaniczne są jednakowe.

▪ Model obciążenia

W modelu fizycznym zakłada się że obciążenia układu mechanicznego mogą być typu:

- siła skupiona
- moment skupiony
- obciążenia ciągłe
 - liniowe
 - powierzchniowe
 - objętościowe

Każde z tych obciążeń posiada określoną wartość, kierunek, zwrot i miejsce przyłożenia. Ponadto mogą one być zmienne w czasie.



- Modele złomu (zniszczenia):
 - złom spowodowany obciążeniem statycznym
 - zmęczenie niskocyklowe materiału
 - zmęczenie wysokocyklowe materiału
 - złom spowodowany długotrwałym działaniem stałego obciążenia
 - kruche bądź plastyczne pękanie materiału
- Niektóre elementy układu, przyjmuje się jako nieodkształcalne
- Niektóre elementy układu, przyjmuje się jako nieważkie
- Zakłada się, że wielkości parametrów fizycznych układu rzeczywistego są niezmiennie w czasie
- Pomija się mało istotne oddziaływania zewnętrzne, między rozpatrywanym układem a otoczeniem
- Zastępuje się procesy stochastyczne jakie mogą zachodzić w układzie rzeczywistym procesami zdeterminowanymi
- Inne.

Model dyskretny

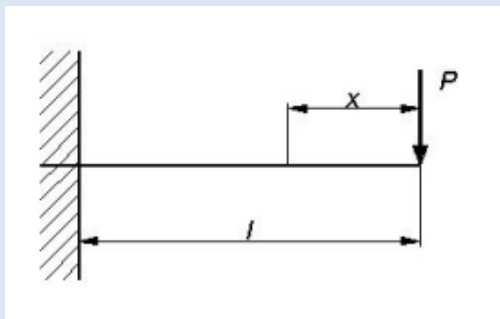
Modele fizyczne składają się zwykle z elementów których parametry rozłożone są w sposób ciągły. Równania opisujące ruch takich modeli są cząstkowymi równaniami różniczkowymi (np. W Teorii Sprężystości). Dokładne analityczne rozwiązanie tych równań jest z reguły trudne lub wręcz niemożliwe. Dlatego ciągły model fizyczny zastępuje się modelem w którym jego parametry mają charakter skupiony. Taką czynność nazywa się **modelowaniem dyskretnym**, a otrzymany w ten sposób model – **modelem dyskretnym**.

Równania opisujące ruch modeli dyskretnych są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, a więc znacznie prostszymi do rozwiązania metodami komputerowymi.

Wyróżnia się dwie zasadnicze metody dyskretyzacji:

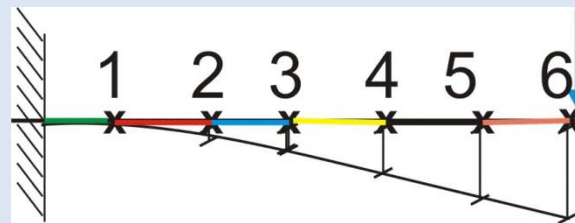
- Dyskretyzacja równań różniczkowych opisujących kontinuum - MRS
- Dyskretyzacja fizyczna - MES

MODEL CIĄGŁY



- deformacja jest funkcją jednej zmiennej (równania zwyczajne)
- jednoosiowy stan naprężenia i odkształcenia (jedno równanie fizyczne)
- jedno (dwa) przemieszczenia punktów (jedna funkcja jednej zmiennej)
- hipoteza płaskich przekrojów - Bernoulli'ego, (liniowy rozkład odkształceń na wysokości przekroju)

MODEL DYSKRETTNY



- konstrukcja podzielona na skończone fragmenty (nieznanymi są przemieszczenia w skończonej liczbie węzłów)
- operatory różniczkowe zastąpione algebraicznymi (równania algebraiczne)
- skończona liczba niewiadomych (układ równań algebraicznych)

Dyskretyzacji podlegają:

- wnętrze konstrukcji
- obciążenia ciągłe
- warunki brzegowe

Model matematyczny

Modelem matematycznym nazywa się układ równań opisujący ruch modelu dyskretnego. Są to zazwyczaj równania różniczkowe. Przedstawiają one zależności np. przemieszczeń od sił wymuszających, a więc uzależniają one sygnał wyjściowy (odpowieź układu) od sygnału wejściowego (wymuszenie działające na układ).

Metody rozwiązywania takich układów, w których niewiadomymi są siły nazywają się metodami sił, a w których niewiadomymi są przemieszczenia metodami przemieszczeń. Metody oparte na bilansie energii nazywają się metodami energetycznymi, mogą być one zarówno metodami sił jak i przemieszczeń. W metodach energetycznych, najczęściej wykorzystuje się równania Lagrange'a II rodzaju.

Program komputerowy

PREPROCESOR

- dane sterujące (np. ilość kroków czasowych, tolerancja dokładności obliczeń)
- opis konstrukcji (dane geometryczne, materiałowe, sposób obciążenia i podparcia)
- graficzna prezentacja danych
- wstępne sprawdzenie danych
- podział na elementy (numeracja elementów i węzłów - meshing)
- graficzna prezentacja modelu



PROCESOR

- generowanie funkcji kształtu elementów
- obliczenie macierzy sztywności elementów
- obliczenie macierzy transformacji
- transformacja macierzy sztywności do układu globalnego
- budowa globalnej macierzy sztywności **K**
- budowa wektora obciążenia **F**
- wprowadzenie warunków brzegowych
- rozwiązanie układu równań **$K \cdot u = F$**



POSTPROCESOR

- obliczanie sił wewnętrznych
- obliczanie reakcji
- graficzna prezentacja danych i wyników obliczeń
- oszacowanie i wydruk błędów obliczeń (np. spełnienie warunków równowagi)

Każdy program do MES składa się z trzech podstawowych modułów: preprocesora, procesora i postprocesora. Główne funkcje tych modułów polegają odpowiednio na: przygotowaniu procesu obliczeń, budowaniu i rozwiązaniu stosownego układu równań, prezentacji wyników. Klasyczną budowę takiego systemu przedstawiono poniżej:

Przegląd niektórych najbardziej znanych systemów ogólnego przeznaczenia

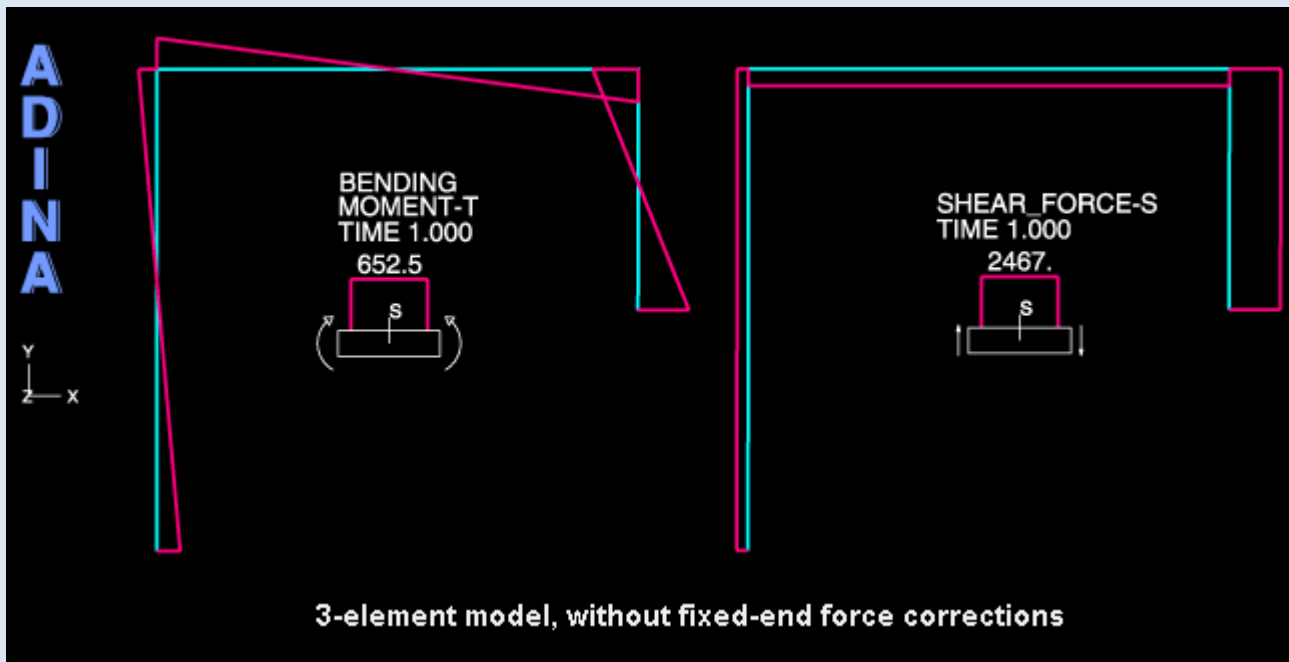
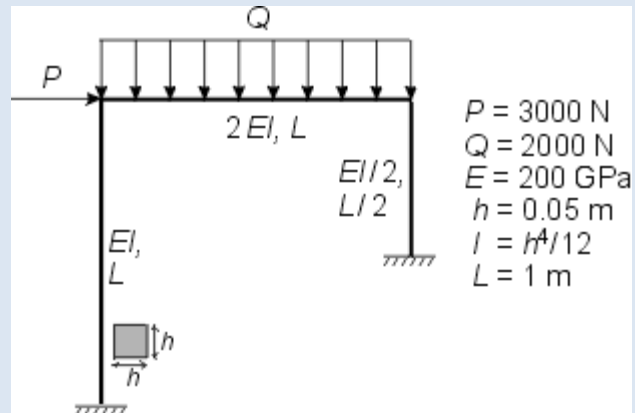
Do bardziej znanych systemów obliczeniowych można zaliczyć:

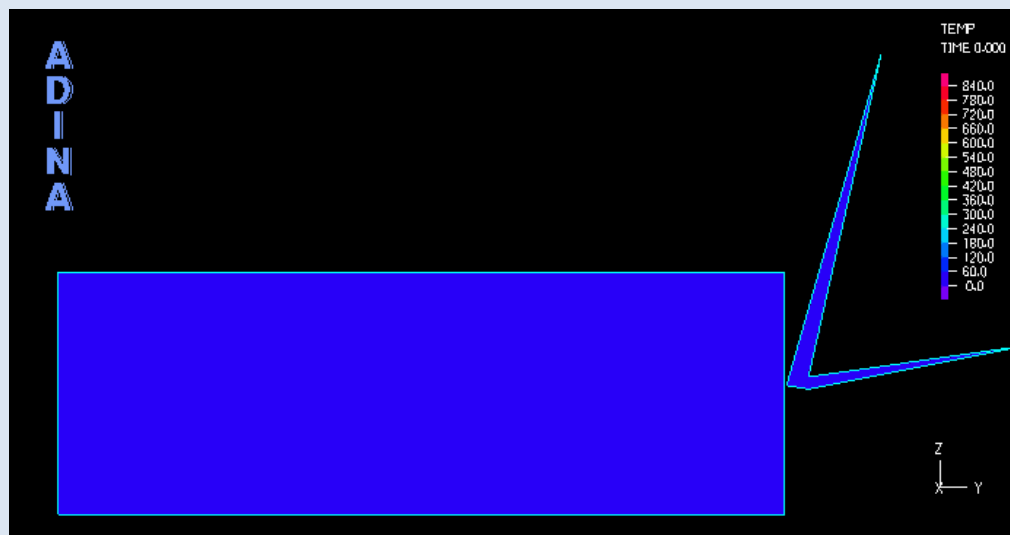
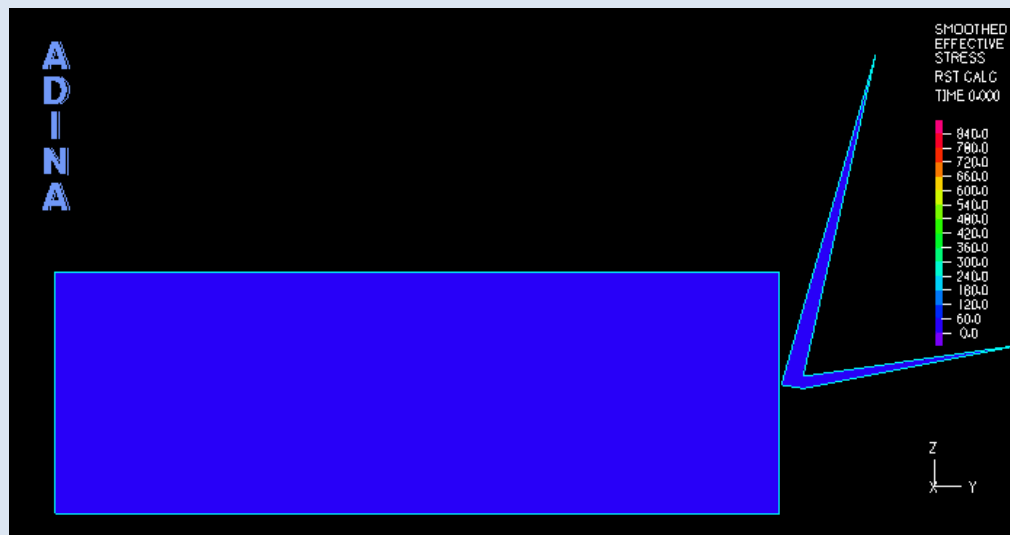
- **ASKA** (Automatic System of Kinematic Analysis), powstał w uniwersytecie w Stuttgarcie według opracowania J.H.Argyrisa. Umożliwia on analizę układów liniowych i nieliniowych (duże przemieszczenia, materiały niesprężyste) z uwzględnieniem efektów cieplnych. System może korzystać z ok.. 30 typów elementów skończonych, pozwalających m.in. na analizę naprężeń powierzchniowych w konstrukcjach lotniczych, samochodowych i okrętowych. Obliczenia systemem ASKA można przeprowadzać z zastosowaniem techniki superelementu. W celu wyeliminowania błędów związanych z nieprawidłowo przygotowanymi danymi wejściowymi wyposażono system w ponad 3 000 testów (zapewniło to bardzo dobrą diagnostykę).
- **NASTRAN** powstał z inicjatywy i na potrzeby NASA. Spełnił istotną rolę w rozwiązywaniu problemów technicznych związanych z realizacją programu kosmicznego APOLLO. Pod nazwa NASTRAN kryje się seria programów służących do symulacji złożonych problemów inżynierskich, od stosunkowo prostej analizy liniowej do silnie nieliniowych zagadnień:
 - Statyka liniowa (włączając relaksacje inercyjna)
 - Mody normalne i wyboczenie
 - Przepływ ciepła (ustalony i niestacjonarny)
 - Reakcje nieustalone
 - Reakcje częstotliwości
 - Widmo reakcji i reakcje losowe
 - Geometryczne i materiałowe reakcje nieliniowe (statyczne i nieustalone)
 - Optymalizacja projektu i wrażliwość (włączając optymalizacje dynamiki i kształtu)
 - Kompozyty

- **COSMOS/M** – jest systemem wyróżniającym się dobrą współpracą z systemami CAD przez zapis graficzny w kodach IGES i DXF. Posiada także własny moduł GEOSTAR, umożliwiający modelowanie bardzo złożonych konstrukcji z wielu dziedzin, np.. Budowy maszyn, pojazdów i samolotów, budownictwa, geologii itp. System ten ma budowę otwartą i szereg modułów do obliczeń różnorodnych zadań.
- **ABAQUS**
- **ADINA**
- **ANSYS**
- **NISSA II**

Stosowane obecnie systemy projektowania wspomaganego komputerowo (CAD), np. **CADS**, **CATIA**, **IDEAS**, **SOLIDWORKS** są wyposażone w moduł obliczeń MES umożliwiający wykonanie oceny stanu naprężeń i przemieszczeń w projektowanych elementach maszyn.

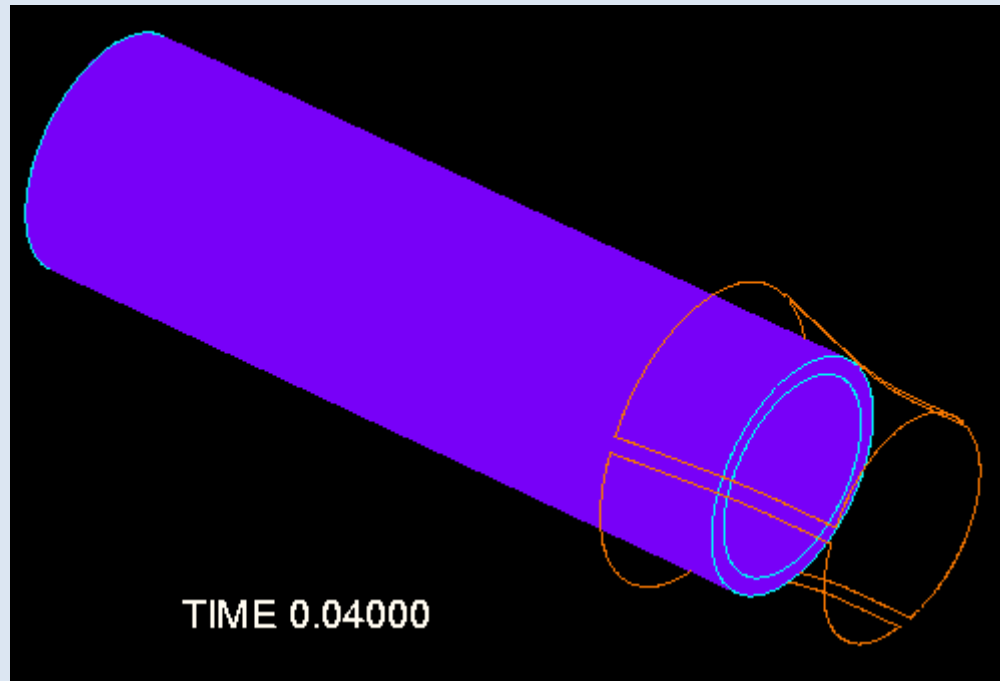
Fixed-End Force Corrections for Beam Elements in Linear Static Analysis





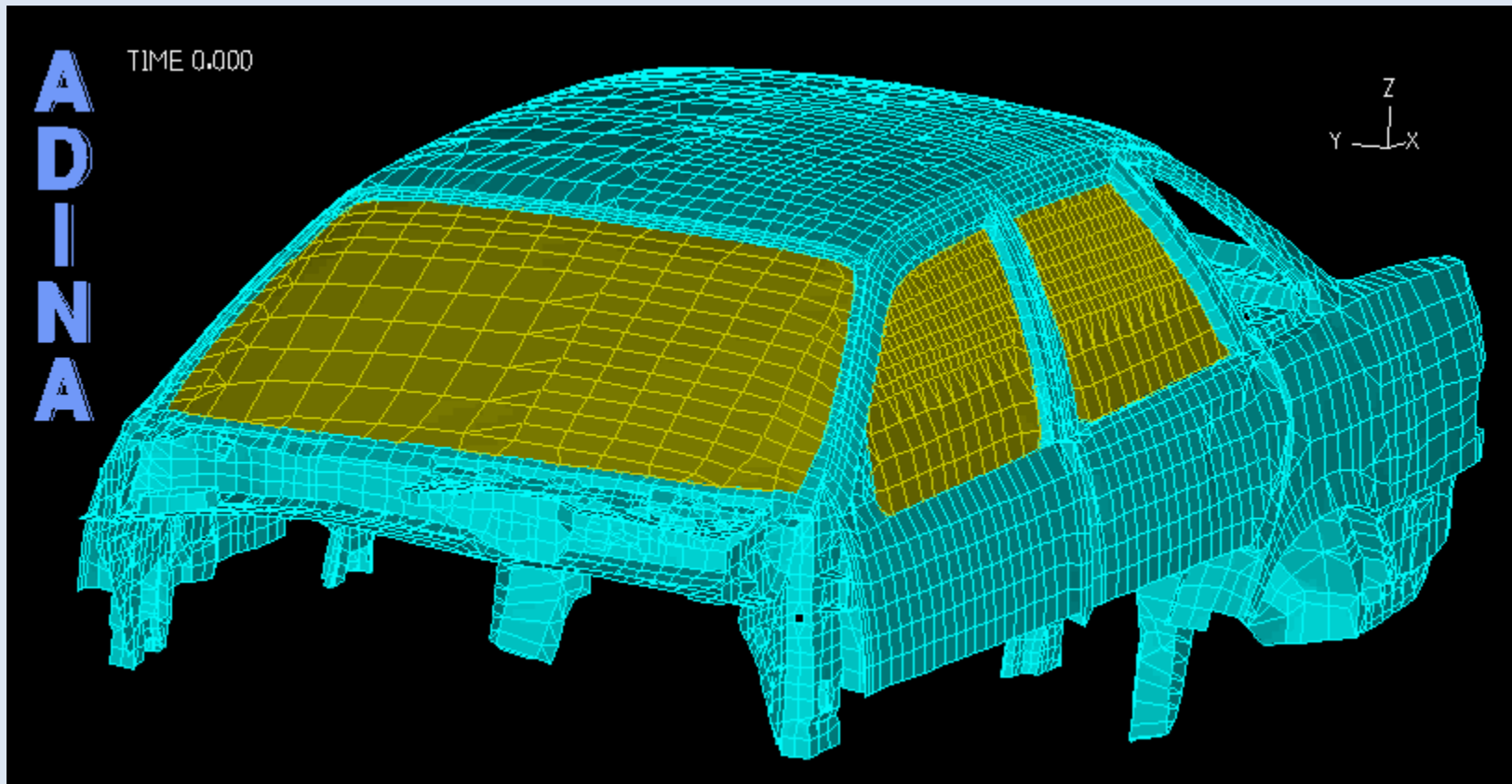
Simulation of a Cutting Process

Cutting processes play a significant role in the production of almost all metal products. Process features such as tool geometry and cutting speed directly influence chip morphology and segmentation, cutting forces, and tool wear. To produce high quality products, the optimal range of the cutting parameters must be known; however, establishing these parameters is difficult and requires considerable investment of time and resources.



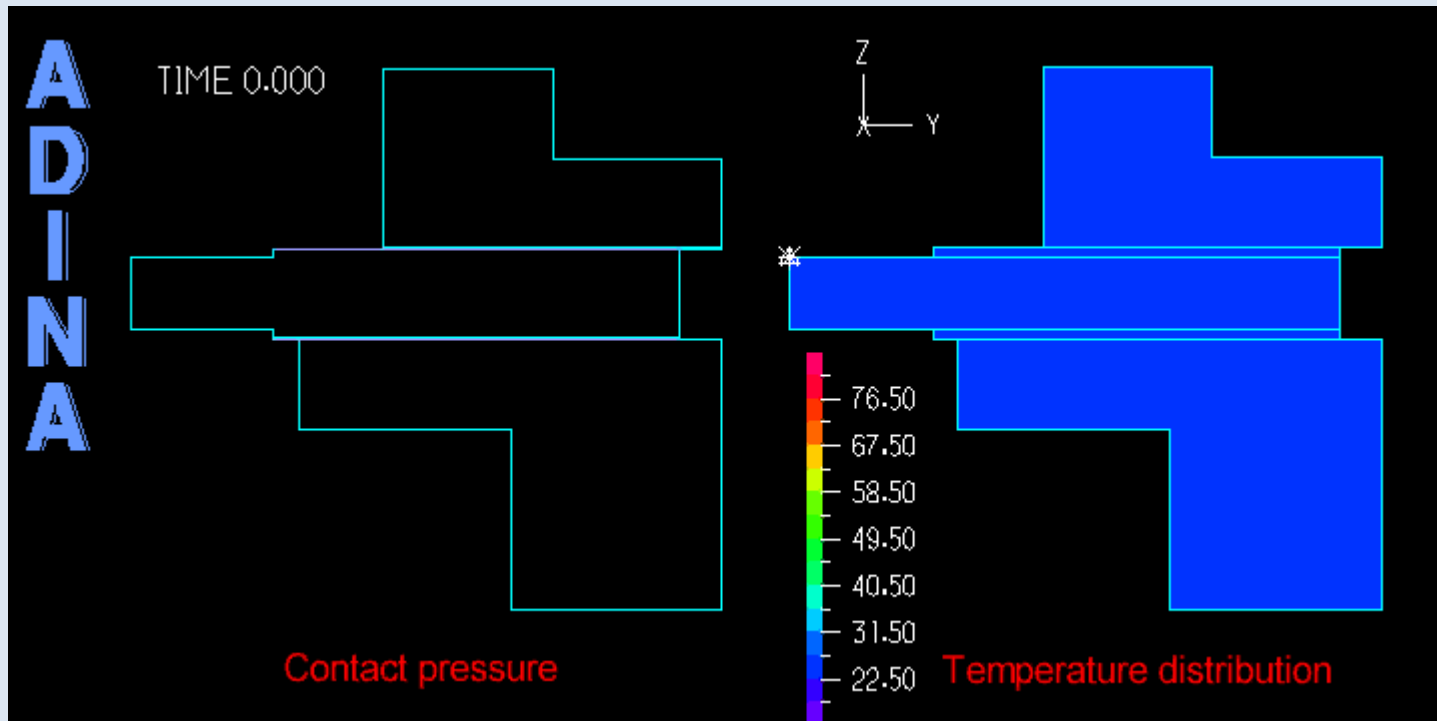
Simulation of Swaging Process

Various tube and bar end forming technologies are widely used in the manufacturing industry. We present, in the above animation, an analysis of one such technology known as swaging.



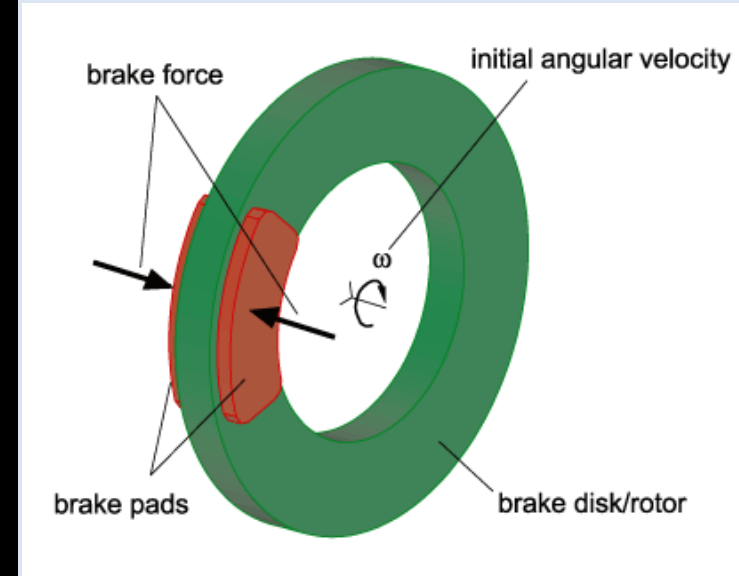
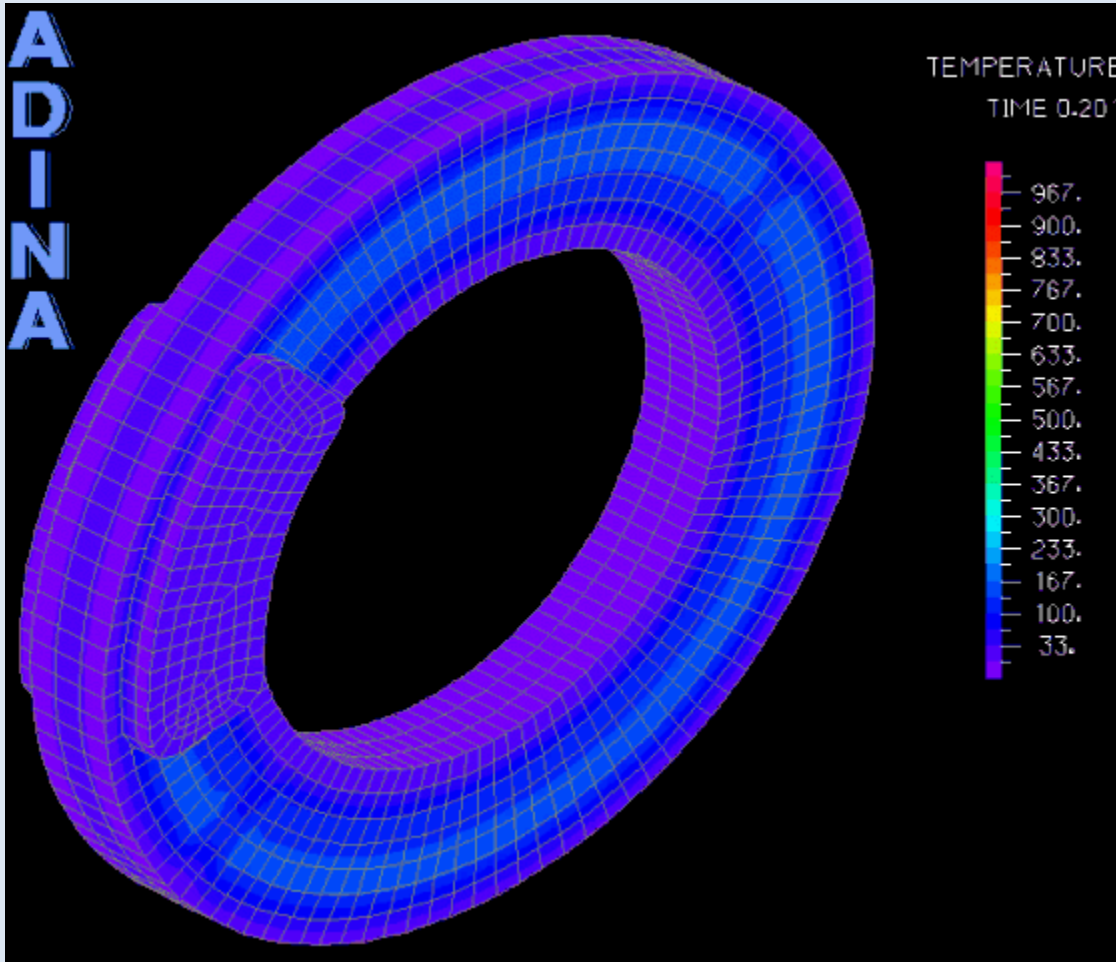
Roof Crush Analysis

Roof crush laboratory tests (simulating rollover car behavior) usually take 10 to 30 seconds to crush the car to the required maximum displacement of the crushing panel. Therefore, it is clearly an almost static or quasi-static problem. It is apparent that a natural way to obtain a solution is to use an implicit/static approach to solve roof crush problems. However, in practice, explicit codes are used with much factor-adjusting. The problem is very difficult to solve implicitly due to buckling, self-contact and material and geometric nonlinearities. Absolutely essential here are robust finite elements and clean solution techniques. To demonstrate the capability of ADINA in handling this class of problems, we present a roof crush analysis by implicit solution with ADINA.



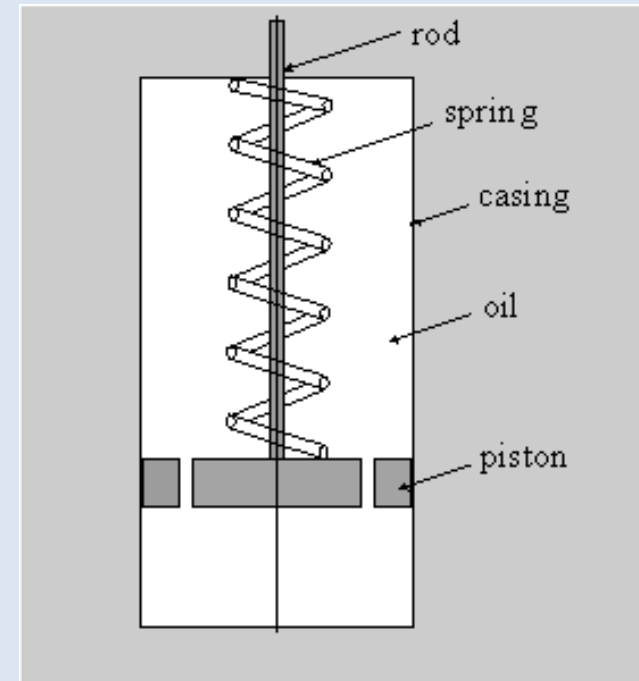
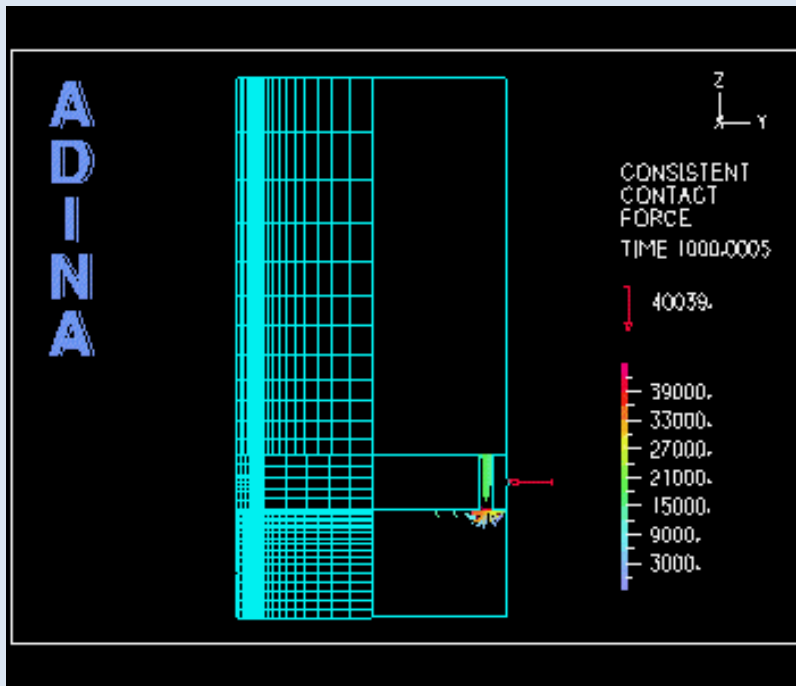
Simulation of Disk Brake System

The ADINA-TMC (Thermo-Mechanical Coupling) program is a powerful tool for fully coupled thermo-mechanical analysis of problems in which the thermal solution affects the structural solution and the structural solution in turn affects the thermal solution. ADINA-TMC takes into account such effects as the internal heat generation due to plastic deformations of the material, heat transfer between contacting bodies, and surface heat generation due to friction on the contacting surfaces.



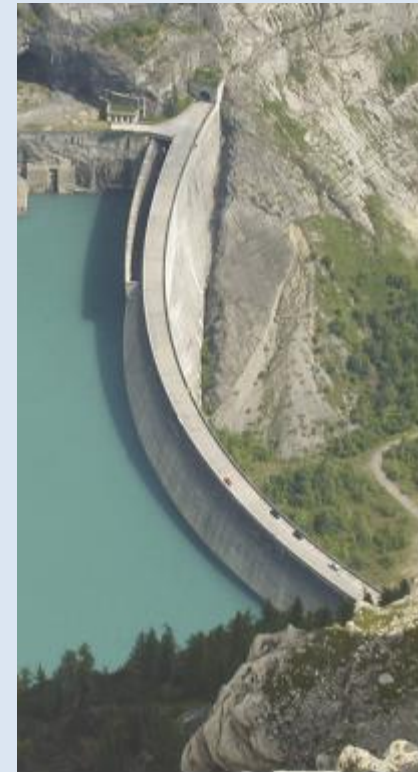
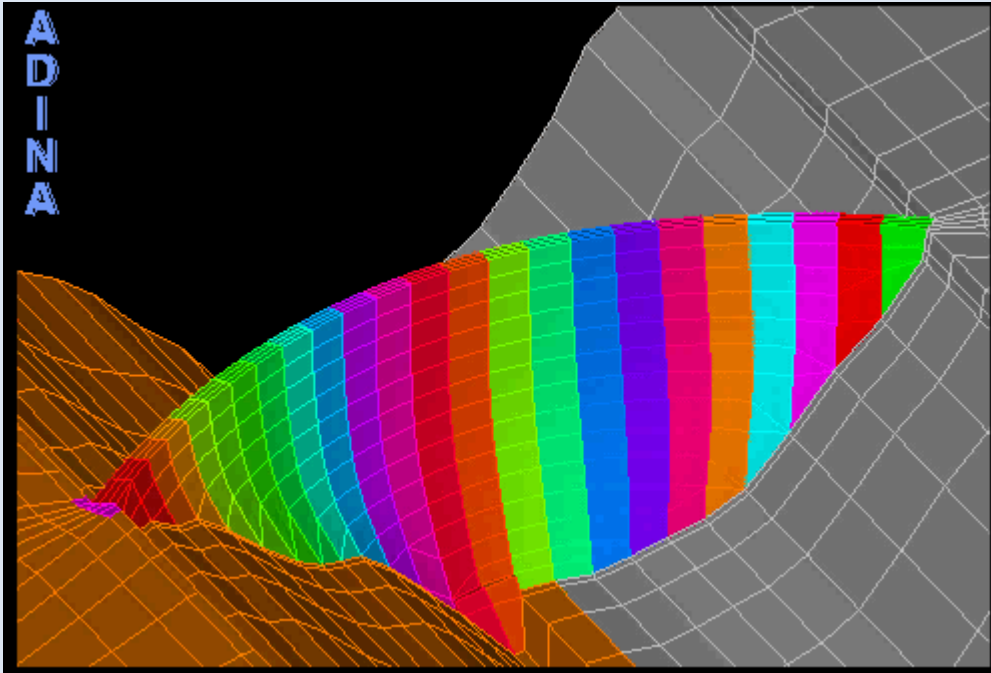
Thermo-Mechanical Coupled Analysis of an Automotive Disk Brake

In this example, we present a 3D transient dynamic analysis of an automotive disk brake. The model has frictional contact, large displacements and strong thermo-mechanical coupling. The sources of thermo-mechanical coupling are the conductive heat transfer between the rotor and pads which only occurs when there is contact, the heat generation due to friction, and the stresses caused by the non-uniform thermal expansion.



Simulation of Gas Shock Absorber

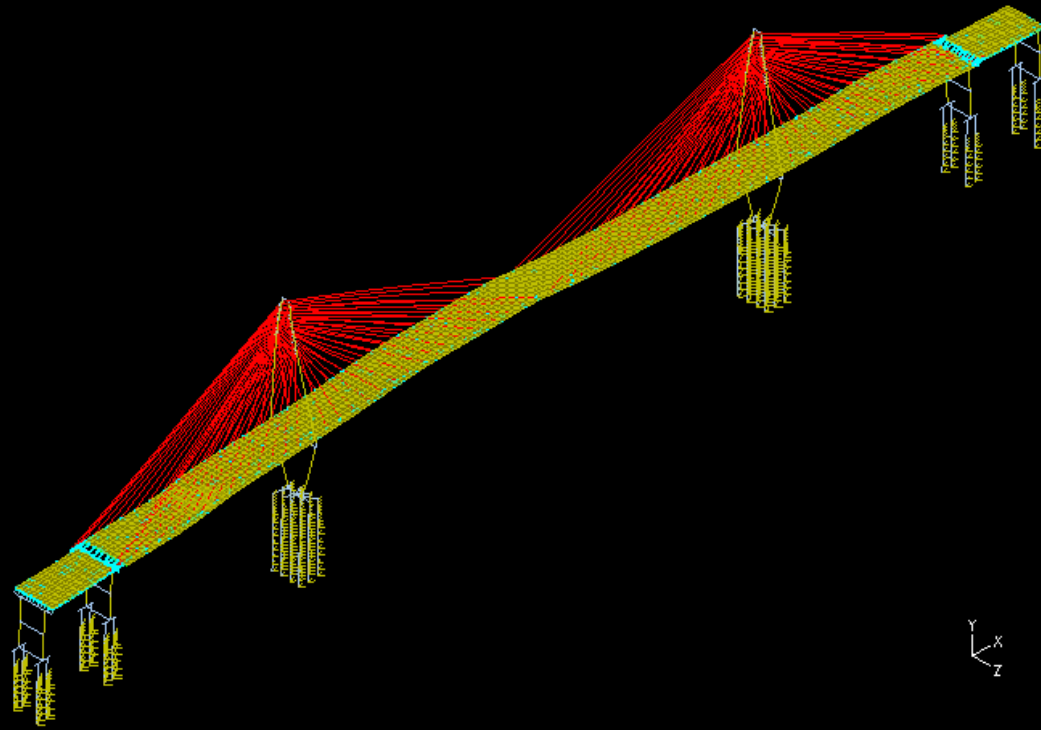
The above animation depicts an axisymmetric model of a mono-tube gas shock absorber, with its schematic beside it. The piston inside the casing pushes its way through the oil (the hydraulic fluid which in reality is a mixture of oil and gas) creating resistance as the oil is pushed through the small holes in the piston. The contact between the piston (solid model) and the casing is modeled by specifying a friction coefficient, which is usually very small due to the lubrication provided by the oil. The spring is initially extended and then released. Its subsequent motion is damped by the oil flowing through the holes in the piston. The figure below shows the acceleration of the piston during a 0.2-second damping event.



Dam Safety in an Earthquake

An earthquake can cause a dam to crack or dislocate, or even cause its component blocks to detach. The damage can result in uncontrolled water release or a catastrophic flood. Numerical methods such as finite element analysis play an important role in assessing the possible seismic damage to dams. In this Brief, we show how ADINA is used by a team of engineers in Switzerland for this challenging task.

ADINA

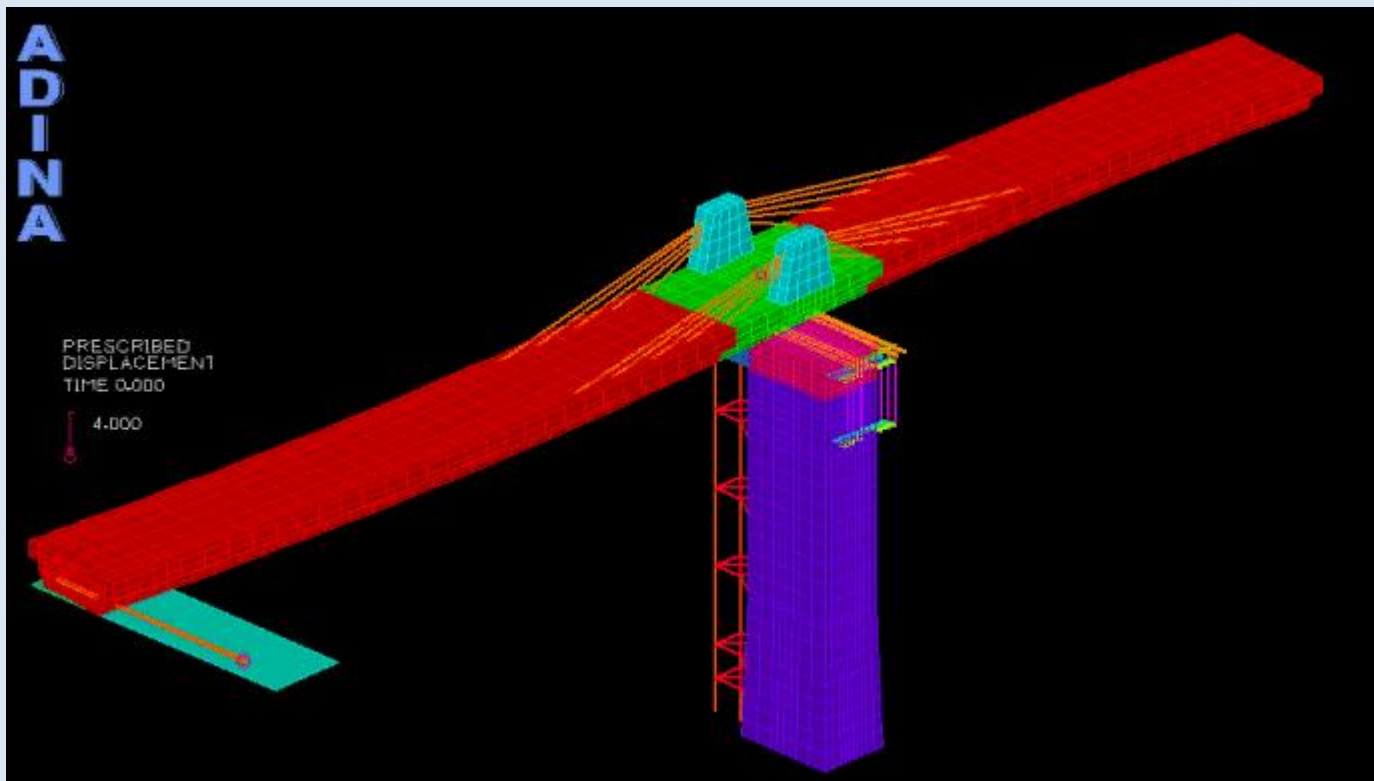


displacement magnification factor = 50.

Seismic Evaluation of the Cooper River Bridge (by SC Solutions, Inc., California)

The design of the new Cooper River cable-stayed bridge in Charleston, South Carolina, was analysed by SC Solutions, California, using ADINA. The structure has a main span, two side spans and two anchor spans, for a total suspended span length of about 1005-m. It is currently the largest cable-stayed span in North America. The two diamond shaped towers (of height about 175-m) support a deck carrying 8 traffic lanes and a pedestrian walkway/bikeway. The main span utilizes a composite concrete deck with I-shaped steel edge girders. The pedestrian walkway/bikeway is cantilevered outside of an edge girder. The high level approaches also utilize composite steel construction with steel girders. Both high approaches are jointless over their full lengths, about 1326-m on the Charleston side and 637-m on the Mount Pleasant side.

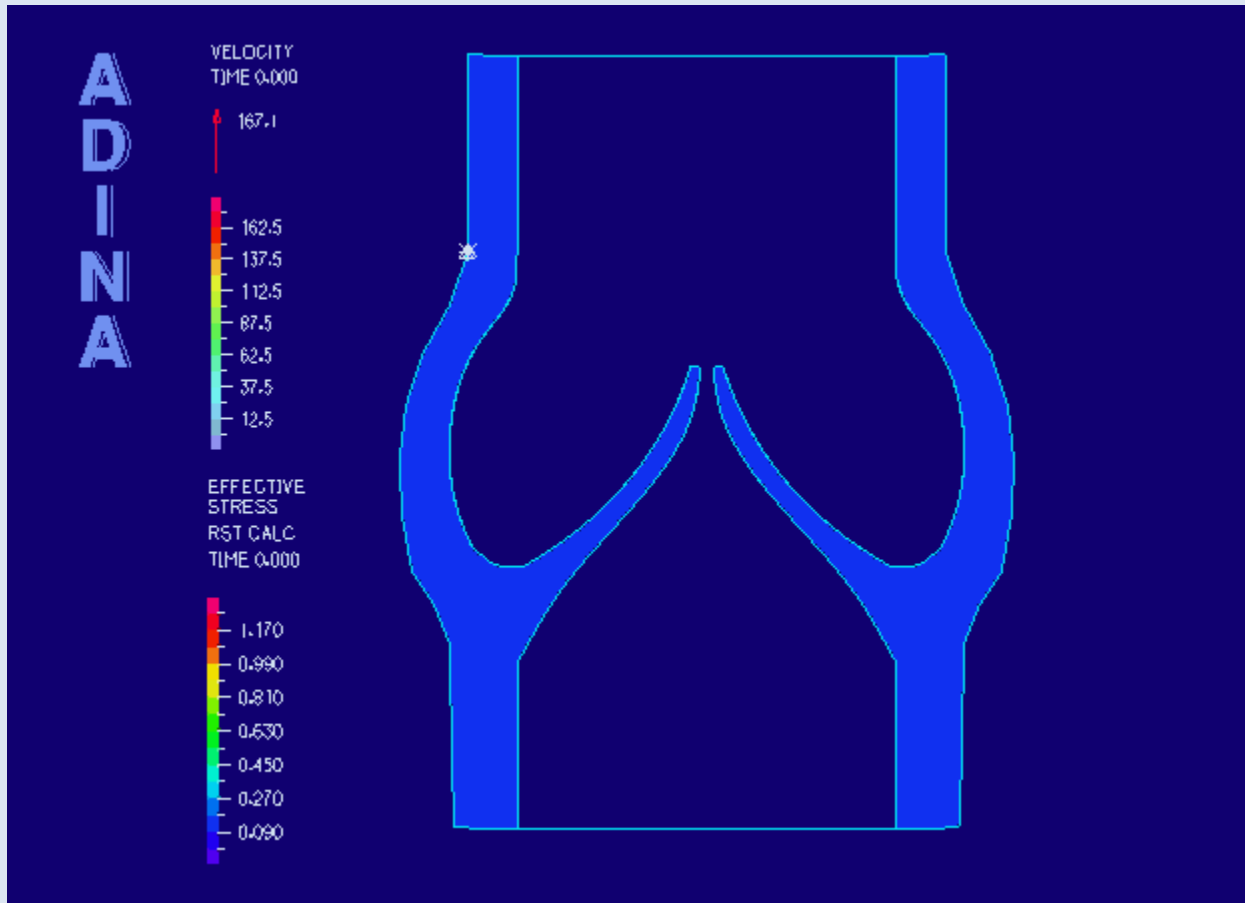




Large Frictional Sliding Analysis of a Prestressed Concrete Bridge Girder

Nowadays, aging infrastructure in the developed world has increased the need for in-depth analyses of existing structures, both for replacement and retrofit. Using a comprehensive and reliable analysis tool is the key factor in understanding the behavior of existing structures and in developing the best retrofit designs.

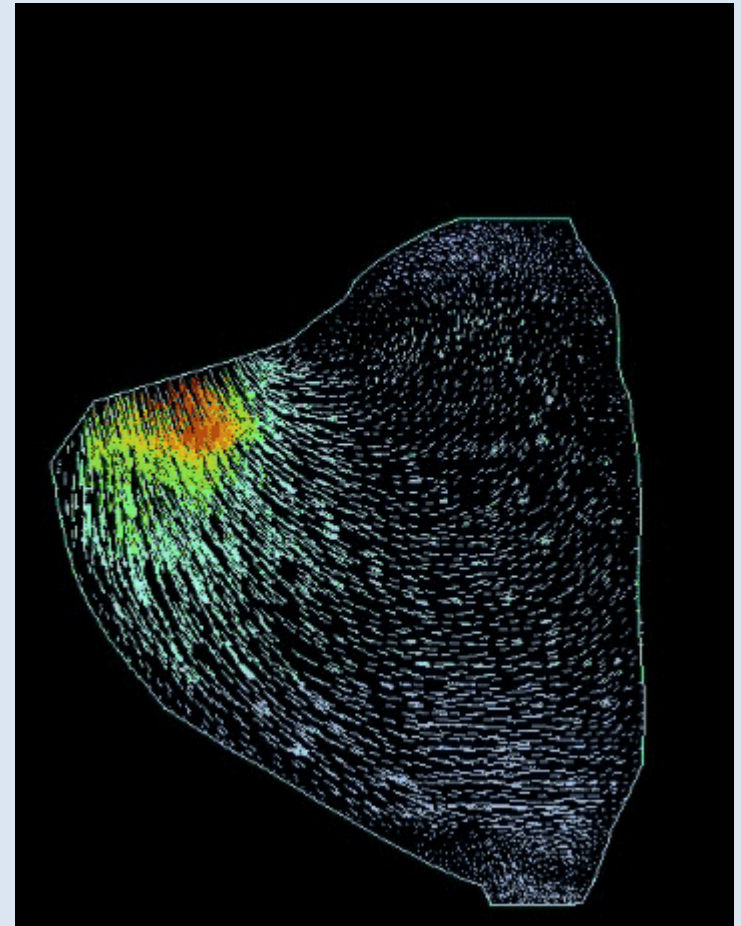
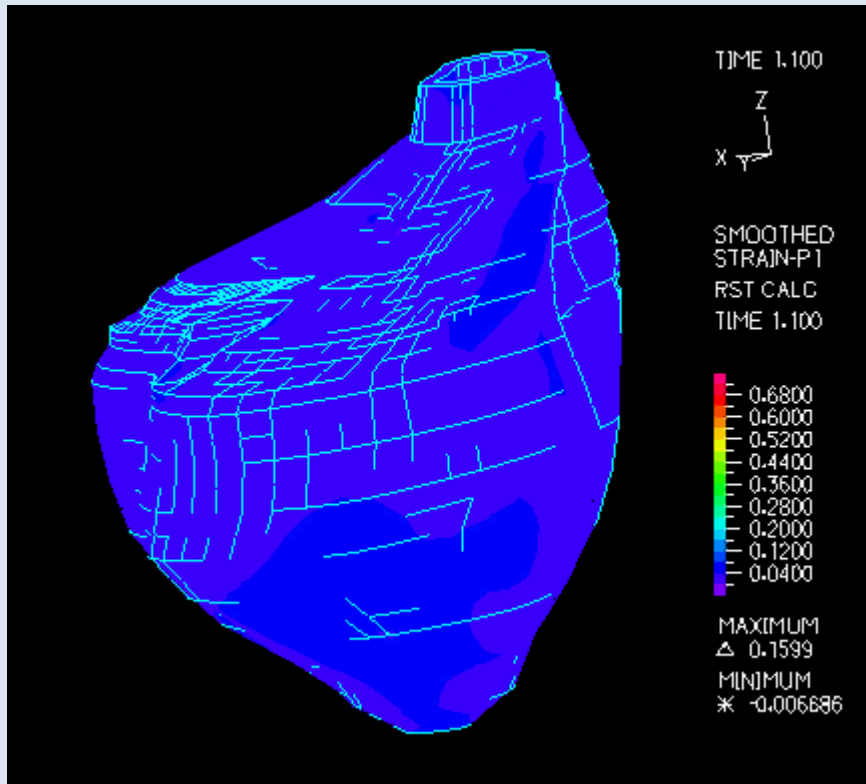




Simulation of Aortic Valve

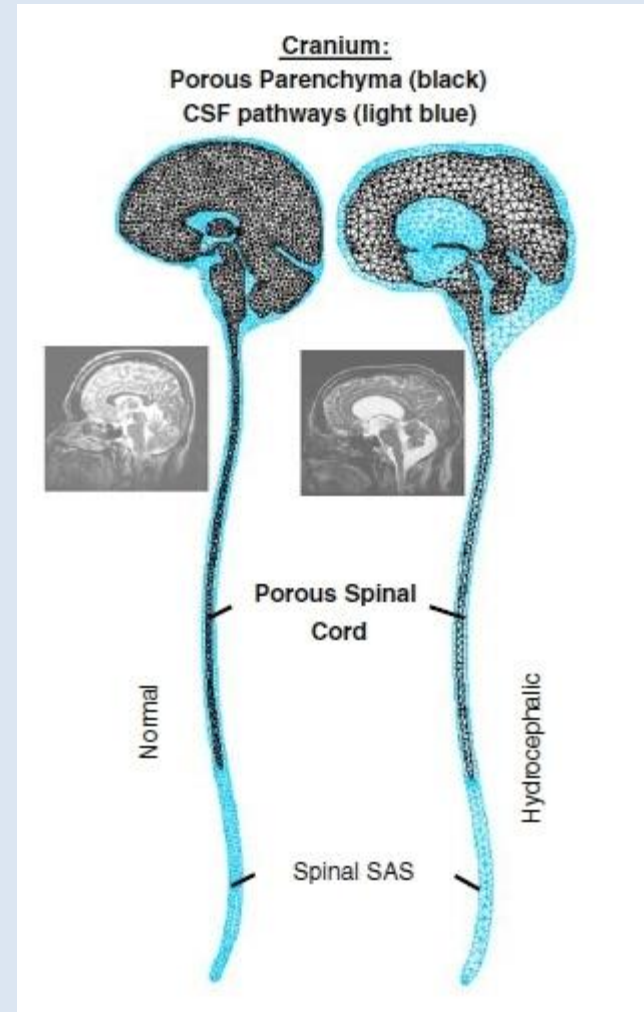
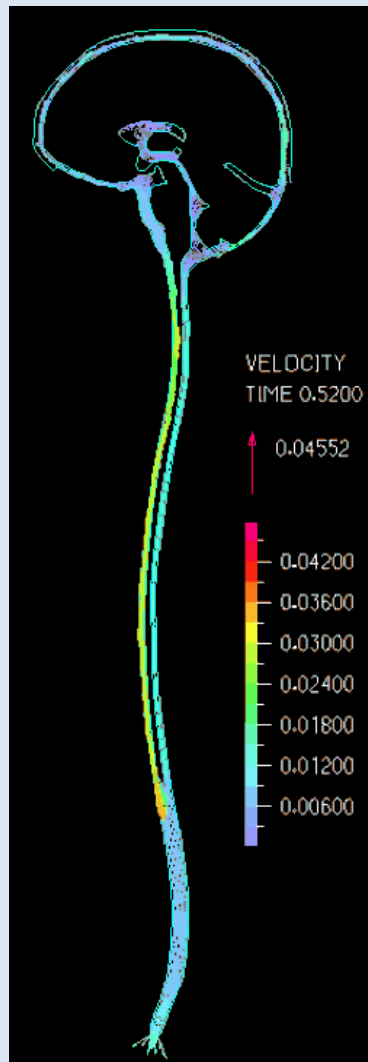
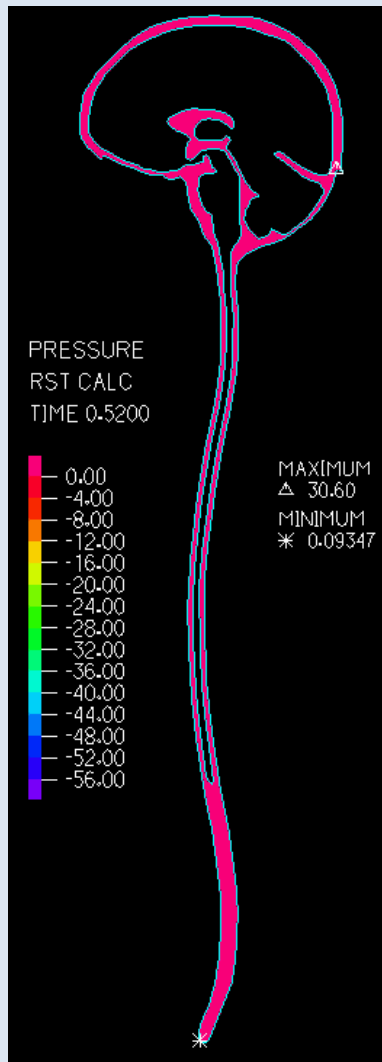
Since the time of Leonardo Da Vinci, it has been recognized that the sinuses behind the aortic valve leaflets produce vortices that aid in closure with minimal trans-valvular pressure.

In this example, we model an aortic valve with ADINA. The aortic root and valve are represented by a two-dimensional plane strain mesh. A sinusoidal pressure of 14 mmHg is applied to the ventricular face. Blood is treated as a slightly compressible Newtonian fluid with a viscosity of 4.6 centipoise, corresponding approximately to an experimentally determined shear rate of 180/s at 37°C. Both the leaflets and the aortic root are modeled as isotropic Neo-Hookean large-deformation solids with a constant of 50 kPa. The solution was obtained with ADINA-FSI.



FSI in Virtual Heart Surgery

Considering surgery, with the rapid advances in the fields of medical imaging, image reconstruction, grid generation and multi-physics computational tools, we are now quite close to construct high-fidelity, patient-specific computational models to devise the best surgical procedure for each individual. These advances can also help researchers to reach a better understanding of the causes of different diseases and potential remedies. ADINA's powerful multiphysics capabilities play a major role in this overall endeavor



Fluid-structure Interaction in Brain Dynamics

Thorough understanding of the cerebrospinal fluid dynamics and its complex interaction with the brain tissues is an important step in understanding the causes of different abnormalities in the central nervous system and designing potential remedies.

Wersja przemieszczeniowa MES

- niewiadomymi są
przemieszczenia węzłów
(przy obciążeniach statycznych)

KRATOWNICA JAKO BEZPOŚREDNIA ILUSTRACJA METODY

Chcąc w najprostszy sposób zilustrować ideę podziału struktury na elementy (dyskretyzacji) oraz technikę budowania macierzy sztywności całego układu, posłużymy się prostym przykładem kratownicy płaskiej. Dla tego przykładu w naturalny sposób narzuca się podział, czyli dyskretyzację, która zakłada, że każdy pręt kratownicy jest jednocześnie elementem. Pełną informację o stanie odkształceń, naprężeń i przemieszczeń pręta (elementu) uzyskamy, gdy będziemy znali przemieszczenia jego końców. Zakładamy, że węzły są idealnymi przegubami, a siły są tak przyłożone w węzłach, że wszystkie elementy przenoszą wyłącznie siły osiowe oraz że materiał prętów jest liniowo-sprężysty.

